Estalmat 2009-10 (Segundo curso)
Eugenio Hernández (UAM)

DESIGUALDADES

1. ¿Cuál es mayor: 31^{11} ó 17^{14} ? (Observa que los números 31 y 17 son "casi"potencias de 2)

2. (Un problema con "casi"potencias de 3) ¿Cuál es mayor 28^{38} ó 80^{28}?

3. a) ¿Cuál es mayor 15^{61} ó 65^{41}?
b) ¿Cuál es mayor 626^{52} ó 15621^{34}?

Desigualdades parecidas a las anteriores pero distintas

4. ¿Cuál es mayor a) 2^{300} ó 3^{200}? b) 2^{77} ó 3^{44}? c) 4^{44} ó 3^{55}?

5. ¿Cuál es mayor a) 3^{401} ó 4^{299}? b) 2^{77} ó 3^{52}? c) 4^{52} ó 7^{40}?

Desigualdad de Bernouilli

6. Rellena las tres últimas columnas de la tabla "Desigualdad de Bernoulli"de la última hoja. En la penúltima columna tienes que poner uno de los signos $>$, $<$ ó $=$. Escribe la desigualdad que creas que es cierta a las vista de los resultados que has obtenido en la tabla que has rellenado. ¿Puedes demostrarla?

7. Prueba a) $(1,1)^{100} > 1024$ b) $(1,01)^{1000} > 1024$

8. Prueba que $\left(\dfrac{256}{243}\right)^{20} > 2$. Usa este resutado para demostar que $4^{80} > 2{\cdot}3^{100}$.

Desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica

9. Rellena las tres últimas columnas de la tabla "Desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica"de la última hoja. En la penúltima columna tienes que poner uno de los signos $>$, $<$ ó $=$. Escribe la desigualdad que creas que es cierta a las vista de los resultados que has obtenido en la tabla que has rellenado. ¿Puedes demostrarla?

(Nota: hay demostraciones geométricas muy elegantes de esta desigualdad. ¿Conoces alguna?)

10. a) Demuestra que $1 + x \geq 2\sqrt{x}$ si $x \geq 0$.

b) Demuestra que $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ si $x > 0$.

c) Demuestra que $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$ para cualesquiera números x e y.

b) Demuestra que $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)^2 \geq \dfrac{4}{xy}$ si $x > 0$ e $y > 0$.

11. Escribe la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica para cuatro números positivos a, b, c y d. ¿Puedes demostrarla?

12. Escribe la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica para tres números positivos a, b y c. ¿Puedes demostrarla? (Puedes hacerla a partir de la desigualdad del ejercicio anterior poniendo $d = \sqrt[3]{abc}$.)

Problema propuesto como ejercicio en el programa de busqueda de talento en Matemáticas, Ciencias e Ingeniería de la Universidad de Wisconsin, curso 2006-07)

13. Sean x, y, z números positivos tales que $x + y + z \leq 1$. Demuestra que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 9$$

Sugerencia: comienza demostrando que $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geq 2$ y luego calcula

$$(x + y + z)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z})$$