Eugenio Hernández (UAM) 25/11/2017

NUEVOS DADOS PARA JUGAR AL MONOPOLY

En el Monopoly se lanzan dos dados. Cada ficha se mueve tantas casillas como la suma de los puntos que hay en las caras superiores de los dados. En la primera tirada, caer en la casilla Suerte, que está a 7 casillas de la salida, es más probable qué poder comprar la Compañía Eléctrica, que está en la casilla 12. ¿Cuánto más?

Solo hay que hacer la distribución de los posibles valores de la suma de los dos dados y contar. La Figura 3 da la respuesta.

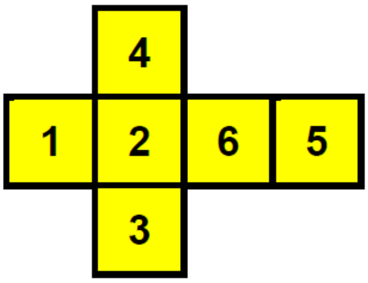

Figura 1. Dado ordinario para jugar al Monopoly

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Figura 2. Posibles resultados de la suma de dos dados

Puntos posibles	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilidad	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Figura 3. Tabla de probabilidades para la suma de un par de dados

En 1970, el coronel George Sicherman encontró otro par de dados que al lanzarlos juntos y sumar los números de sus caras superiores daban la misma tabla de probabilidades que la de la Figura 3. Aquí tienes los dados de Sicherman.

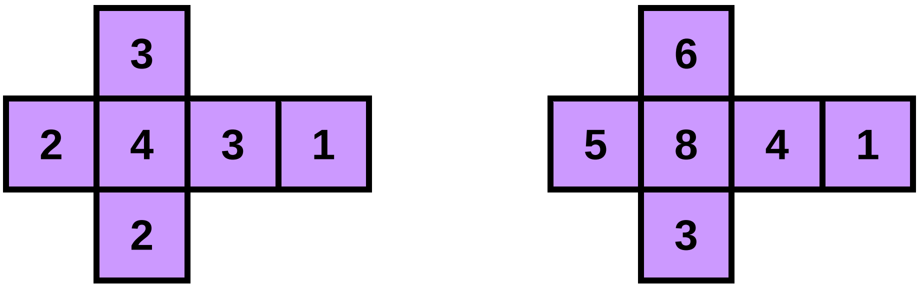

Figura 4. Los dados del coronel Sicherman

Comprueba que dan la misma tabla de probabilidad al lanzarlos juntos que la de la Figura 3.

¿Cómo se pueden hallar los dados del coronel Sicherman? ¿Es el único par de dados, distintos de los ordinarios, que dan la tabla de probabilidades de la Figura 3 al lanzarlos juntos?

La respuesta está en aprender a expresar los dados como un polinomio. El polinomio de un dado ordinario es

$$P(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x.$$

Cada término del polinomio de la forma ax^n indica que hay a caras del dado con el valor n. Los polinomios de los dados de Sicherman son

$$S_1(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x \quad \text{y} \quad S_2(x) = x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x.$$

Si se multiplica $P(x)$ por $P(x)$ se obtiene

$$[P(x)]^2 = x^{12} +2x^{11} + 3x^{10} + 4x^9 + 5x^8 + 6x^7 + 5x^6 + 4x^5 + 3x^4 + 2x^3 + x^2,$$

que se corresponde con las probabilidades que se obtienen al lanzar dos dados y sumar los resultados. Esto es porque $x^n \times x^m = x^{n+m}$. Observa que los dados ordinarios son dos factores (iguales) del polinomio $[P(x)]^2$. Para encontrar dados como los del coronel Sicherman hay que factorizar $[P(x)]^2$ de otra manera.

Algunas restricciones:

1. Las caras de los dados no pueden estar en blanco, así que sus polinomios no pueden tener términos independientes.
2. Los dados deben tener seis caras, luego los coeficientes de sus polinomios deben sumar 6 (si lo quieres más conciso, $P(1)=6$).

Antes de factorizar $[P(x)]^2$, vamos a factorizar $P(x)$:

$$P(x) = x(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x (x^6 – 1) / (x – 1)$$

$$= x (x^3 – 1) (x^3 + 1) / (x – 1) = x (x^2 + x + 1) (x^2 – x + 1) (x + 1).$$

Los factores de $[P(x)]^2$ son:

$$[P(x)]^2 = x^2 (x^2 + x + 1)^2 (x^2 – x + 1)^2 (x + 1)^2.$$

Ahora tenemos que factorizar este polinomio como producto de dos polinomios con las restricciones apuntadas. Hay dos factores x, dos factores $(x^2 + x + 1)$, dos factores $(x^2 - x + 1)$ y dos factores $(x+1)$. Se pueden combinar de muchas maneras, pero como tenemos restricciones hay que tener cuidado. Para que no haya términos independientes (restricción 1) ambos factores deben tener una x, y por tanto este término debe aparecer en ambos polinomios. Además, la restricción 2 obliga a que $P(1)$ sea 6. Por tanto, hemos de repartir cada uno de los factores de la forma $(x^2 + x + 1)$ entre los dos polinomios (porque cuando $x=1$ este factor da 3), y también hemos de repartir cada uno de los factores de la forma $(x+1)$ entre los dos polinomios (porque cuando $x=1$ este factor da 2).... y $3\times 2 = 6$. Solo podemos jugar con los dos factores de la forma $(x^2 - x + 1)$. Así que solo hay dos posibilidades:

Primera posibilidad

Dado 1: $x (x^2 + x + 1) (x + 1) (x^2 – x + 1)$

Dado 2: $x (x^2 + x + 1) (x + 1) (x^2 – x + 1)$

Segunda posibilidad

Dado 1: $x (x^2 + x + 1) (x + 1) (x^2 – x + 1)^2$

Dado 2: $x (x^2 + x + 1) (x + 1)$

La primera posibilidad corresponde al par de dados con los que habitualmente se juega al Monopoly. La segunda corresponde al par de dados del coronel Sicherman (¡compruébalo tu mismo multiplicando los polinomios!) con los que también puedes jugar al Monopoly. Estos son todos los casos posibles.

Podemos seguir jugando. ¿Qué sucede si permitimos que el dado tenga caras en blanco? El polinomio de un dado ya puede tener termino independiente (pero sus coeficientes deben sumar 6, porque sigue siendo un dado), así que podemos jugar con el factor *x* y ponérselo a un factor o a otro. Comprueba que entonces hay tres nuevos pares de dados con los que puedes jugar al Monopoly:

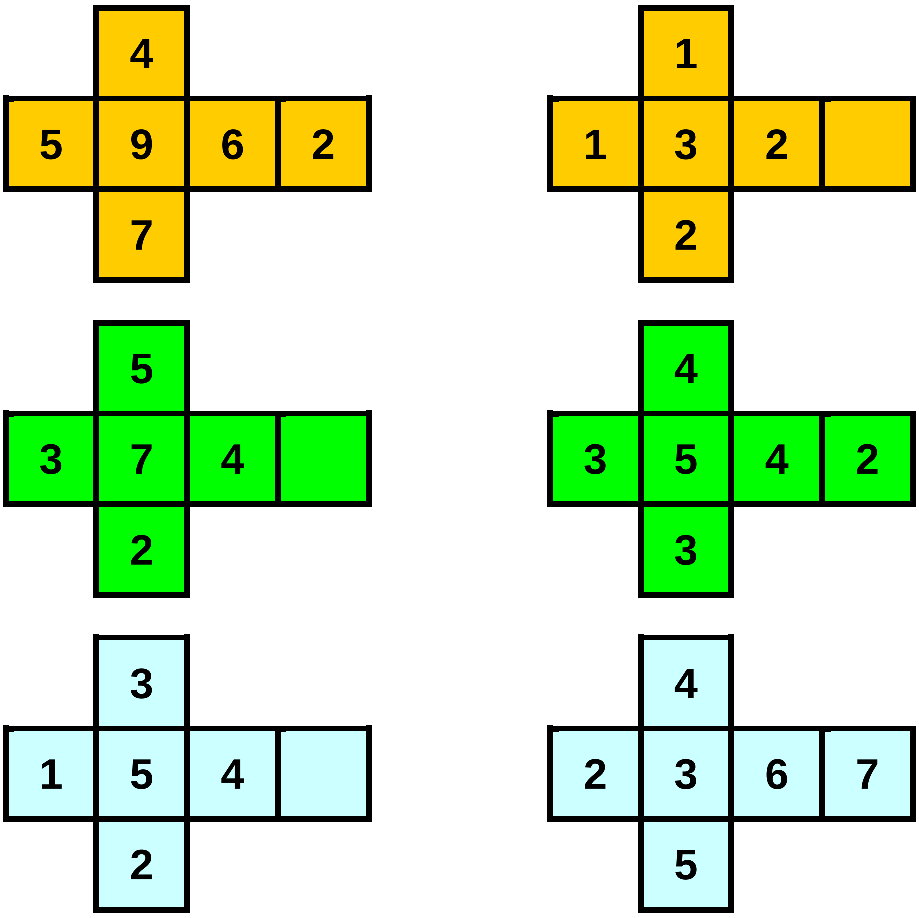

Figura 5. Tres nuevos pares de dados, con alguna cara en blanco, para jugar al Monopoly.

¡Aun hay más juego! ¿Por qué se juega con dados de seis caras? ¿Por qué no usar cualquier sólido platónico? (podríamos usar otros poliedros, pero sus caras tendrían pesos irregulares). Con un dado tetraédrico sin caras en blanco también hay dos posibilidades; para un dado octaédrico hay tres posibilidades, de nuevo sin caras en blanco.

En lugar de jugar a los dados podemos jugar a la lotería. Con dos bombos que tienen bolas numeradas de *1* a *n* podemos sacar una bola de cada uno de ellos y sumar el resultado. ¿Podríamos poner otra numeración en las *n* bolas de cada bombo y que la suma diera la misma probabilidad? Si te fías de lo que te he contado para el tetraedro y el octaedro, dirías que hay más posibilidades cuanto más grande es *n*. Pero ¡cuidado! Cuando pones 35 bolas en cada bombo no hay más posibilidad que la numeración consecutiva.

Y si no te has cansado, puedes jugar al TRIPOLY: tiras tres dados y sumas los puntos de sus caras superiores.

Todo esto ¡y más! lo puedes encontrar en el artículo *Let 'em roll*, escrito por Clare Hobbs y publicado en el número 41 (diciembre 2006) de la revista Plus Magazine (plus.maths.org), que no debes dejar de mirar de vez en cuando.