Estalmat Madrid
11 de marzo de 2017

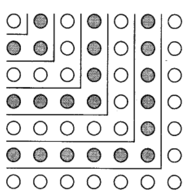
DEMOSTRACIONES VISUALES (2)

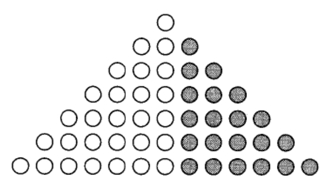
Eugenio Hernández (Universidad Autónoma de Madrid)

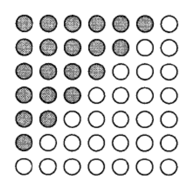
Referencias: 1. *Proofs without words: Exercises in visual thinking.* R.B. Nelsen, The Mathematical Association of America, 1993.
2. *Math made visual*, C. Alsina, R.B. Nelsen, The Mathematical Association of America, 2006.

1. Demostraciones contando círculos

(Suma de enteros impares) Las figuras siguientes muestran demostraciones visuales de la fórmula $1+3+5+7+\ldots\ldots+(2n-3)+(2n-1)=n^2$. En ambos se usa el siguiente principio: al contar los objetos de un conjunto de dos formas diferentes se obtiene el mismo resultado.







1.1 (Suma de enteros positivos) Haz dos demostraciones visuales de la fórmula para la suma de enteros: $1+2+3+4+\ldots\ldots+(n-1)+n=n(n+1)/2$

1.2 Haz una demostración visual de la fórmula

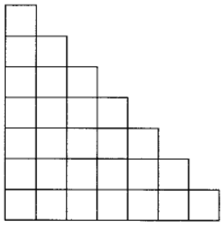
$$1+2+3+\ldots\ldots+(n-1)+n+(n-1)+\ldots+3+2+1=n^2.$$

1.3 (Galileo) Calcula $\frac{1+3+5+7+9}{11+13+15+17+19}$. ¿Podrías hacer una demostración visual? ¿Sabrías generalizar el resultado?

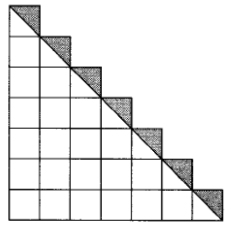
2. Demostraciones calculando áreas

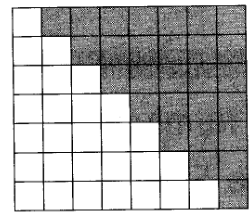
Los números positivos se pueden representar como áreas de rectángulos. Midiendo áreas de dos formas diferentes se pueden demostrar igualdades. Comparando áreas se pueden demostrar desigualdades. Las figuras siguientes muestran demostraciones visuales de la fórmula para la suma de números enteros positivos: $1+2+3+4+\ldots\ldots+(n-1)+n=n(n+1)/2$

(a)



(b)





2.1 Calcula visualmente 4+7+10+13+16+19+22+25 (suma de los términos de una progresión aritmética de razón 3). ¿Puedes dar una fórmula general para calcular

$$a + (a+d) + (a+2d) + \ldots\ldots + (a+(n-1)d) \ ?$$

2.2 Los números de Fibonacci son $F_1=1$, $F_2=1$ y a partir de aquí, si n es mayor o igual que 3, $F_n= F_{n-1}+ F_{n-2}$. Escribe los primeros 8 números de Fibonacci y prueba que

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 + F_6^2 = F_6\, F_7$$

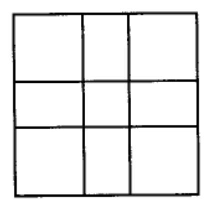
¿Puedes dar una formula general?

2.3 Ya conoces las igualdades $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ y $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$. Haz ahora una demostración visual de cada una de ellas usando áreas de cuadrados y rectángulos.

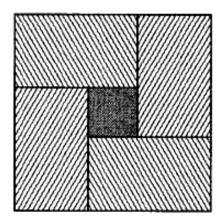
2.4 Demuestra visualmente usando áreas la identidad $F_{n+1}^2 = F_n^2 + F_{n-1}^2 + 2F_{n-1}F_n$

2.5 Usa la figura de la derecha para demostrar la identidad

$$F_{n+1}^2 = 4F_{n-1}^2 + 4F_{n-1}F_{n-2} + F_{n-2}^2$$



2.6 La figura de la derecha te permite demostrar que si x es un número positivo se cumple $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Usa la misma figura para demostrar la desigualdad siguiente entre la media geométrica y la media aritmética de dos números: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$



*2.7 (Suma de cuadrados) La fórmula $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ es correcta. Haz una demostración visual de esta fórmula para n=5.

*2.8 (Suma de cubos) La fórmula $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ es correcta. Haz una demostración visual de esta fórmula para n=4.

(Si no terminas todos los ejercicios en clase envía tus soluciones a eugenio.hernandez@uam.es y te las devolveré corregidas)