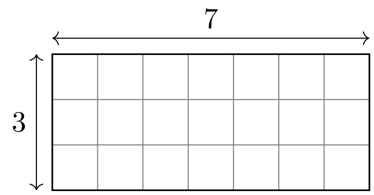
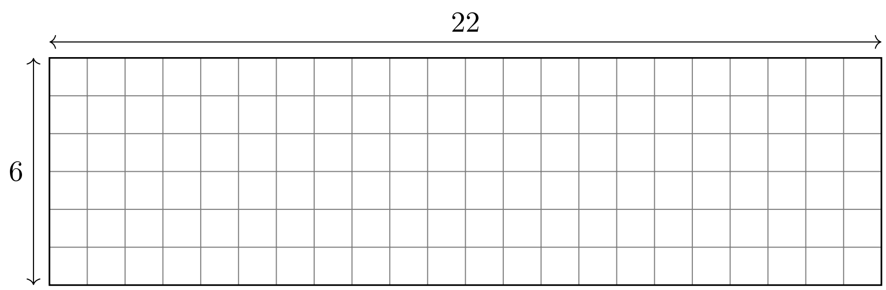
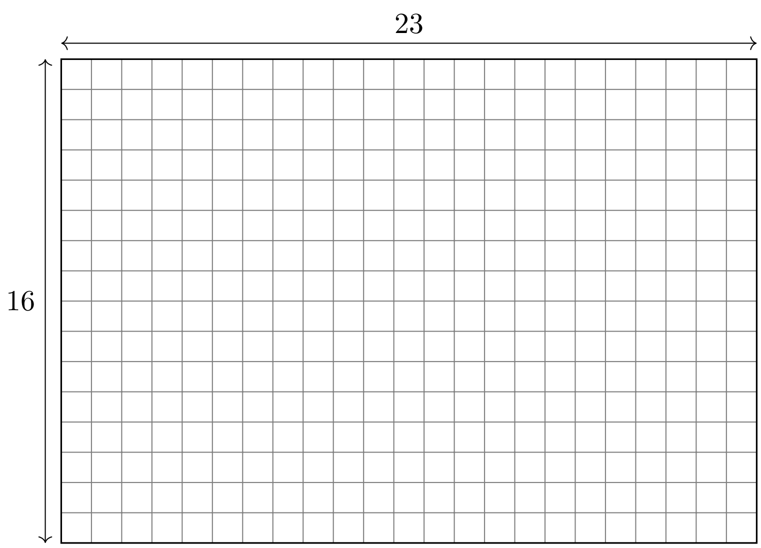
## Fracciones continuas I

### Problema 1

Queremos embaldosar una habitación rectangular utilizando exclusivamente baldosas cuadradas, no necesariamente iguales. ¿De qué forma se puede hacer usando el mínimo número posible de baldosas? ¿Cuántas baldosas tendrías que utilizar?

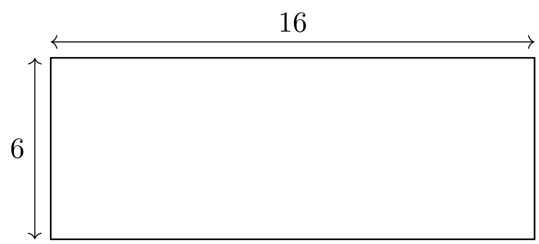


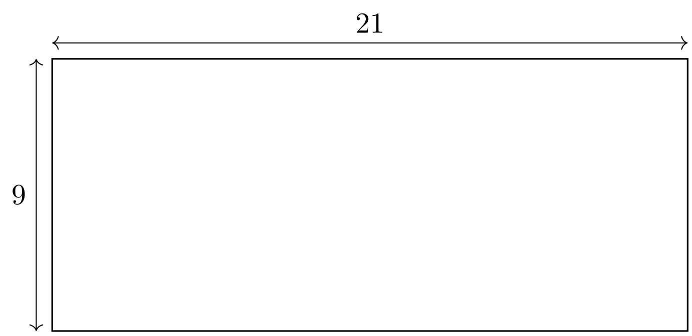



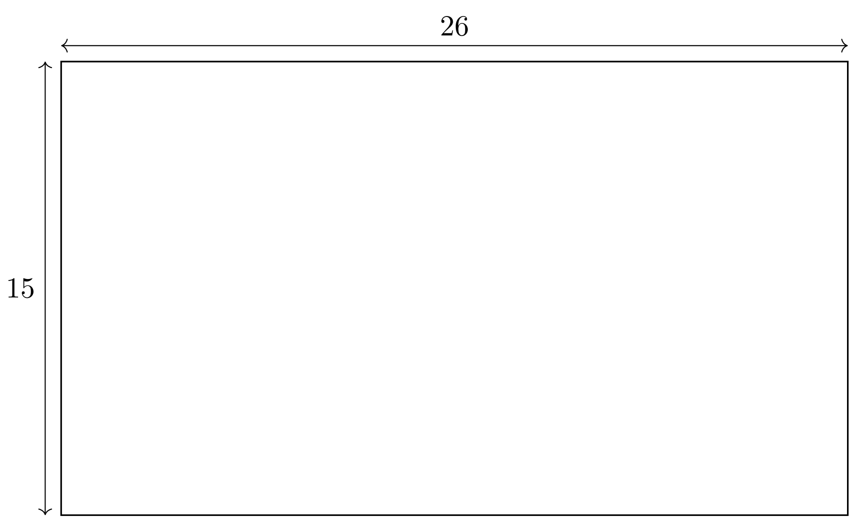



**Problema 2**

**Regla y compás.** ¿De qué forma se puede embaldosar la habitación usando el mínimo número posible de baldosas (cuadradas)? ¿Cuántas baldosas tendrías que utilizar?




**Problema 3**

En el problema anterior, ¿cuál es la dimensión de la baldosa más pequeña de cada habitación?

Está claro que siempre se puede embaldosar una habitación de dimensiones enteras $a \times b$. En realidad estamos representando gráficamente la división entera entre $a$ y $b$, y podemos escribir la fracción de una forma especial denominada fracción continua.

Una **fracción continua simple** de un número real $\alpha$ es una expresión del tipo:

$$\alpha = c_1 + \cfrac{1}{c_2 + \cfrac{1}{c_3 + \cfrac{1}{c_4 + \cfrac{1}{\ddots}}}} = [c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots]$$

donde los $c_k$ se denominan **cocientes parciales**, siendo $c_1 = \lfloor \alpha \rfloor$ la parte entera de $\alpha$ y el resto enteros positivos.

Si $\alpha$ es un número racional, el método para obtener la fracción continua de $\alpha = a/b$ no es otra cosa que el **algoritmo de Euclides** para hallar el máximo común divisor de $a$ y $b$:

| | | Cociente | | | | Resto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 46 | = | 5 | × | 8 | + | 6 |
| 8 | = | 1 | × | 6 | + | 2 |
| 6 | = | 3 | × | 2 | + | 0 |

El último resto no nulo es 2

$$\Rightarrow \quad \mathrm{mcd}(46, 8) = 2, \qquad \frac{46}{8} = 5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}} = [5, 1, 3]$$

Como el algoritmo de Euclides es finito, la fracción continua de un número racional también lo será, y es obvio que una fracción continua simple finita representa un número racional, puesto que basta efectuar las operaciones que están indicadas para obtenerla.

Un número es racional si y solamente si se puede representar por una fracción continua simple finita.

$$\alpha \in \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = [c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_n]$$

Esta representación es única salvo si $c_n = 1$, en cuyo caso

$$[c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, 1] = [c_1, c_2, \ldots, c_{n-1} + 1]$$

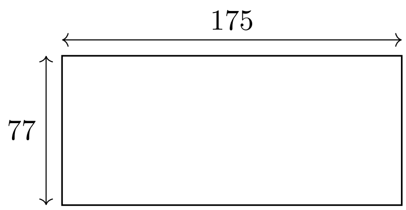
**Problema 4**

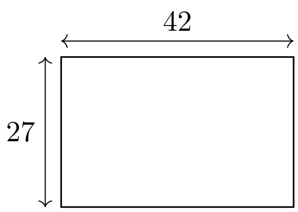
Determinar las fracciones asociadas a las siguientes fracciones continuas. ¿Encuentras alguna relación?

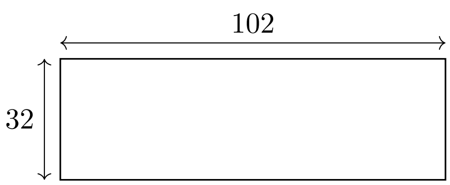
$$[1, 3, 5, 7], \qquad [1, 3, 5], \qquad [7, 5, 3, 1]$$

**Problema 5**

Hallar la fracción continua correspondiente a la razón entre las dimensiones de los siguientes rectángulos.

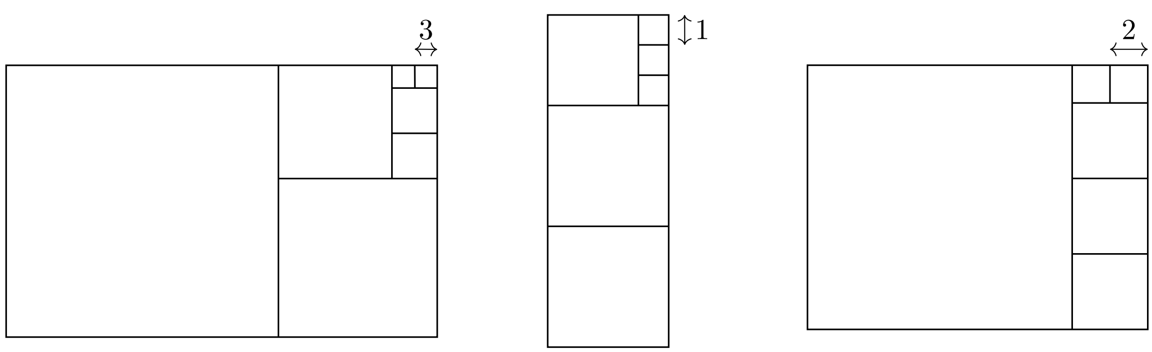


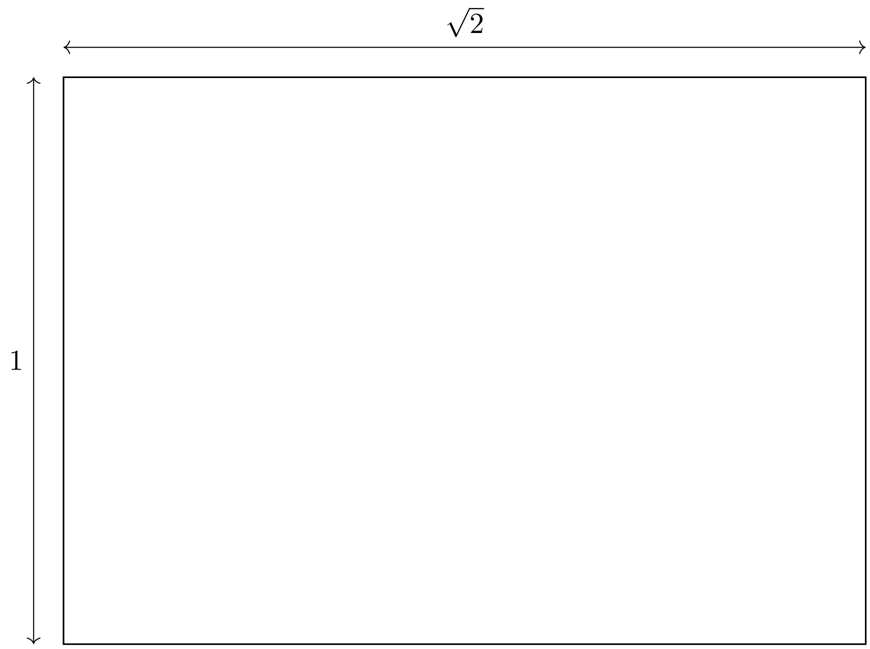

**Problema 6**

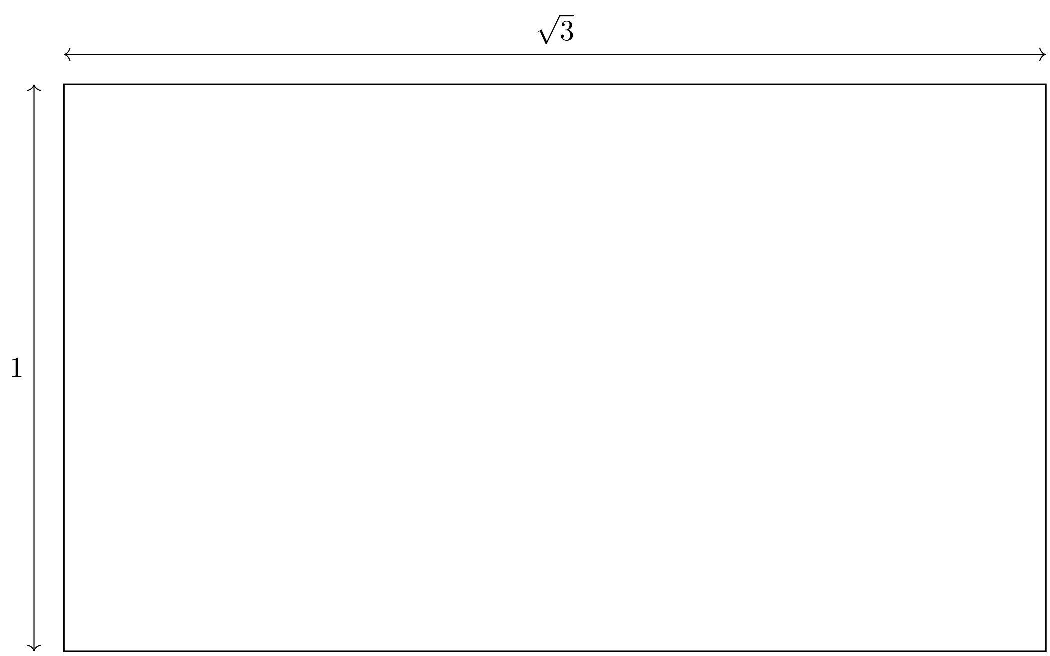
Los tres rectángulos de la figura están recubiertos por cuadrados. A partir del lado del cuadrado más pequeño, ¿es posible hallar la dimensión del rectángulo? ¿y sin esa información?

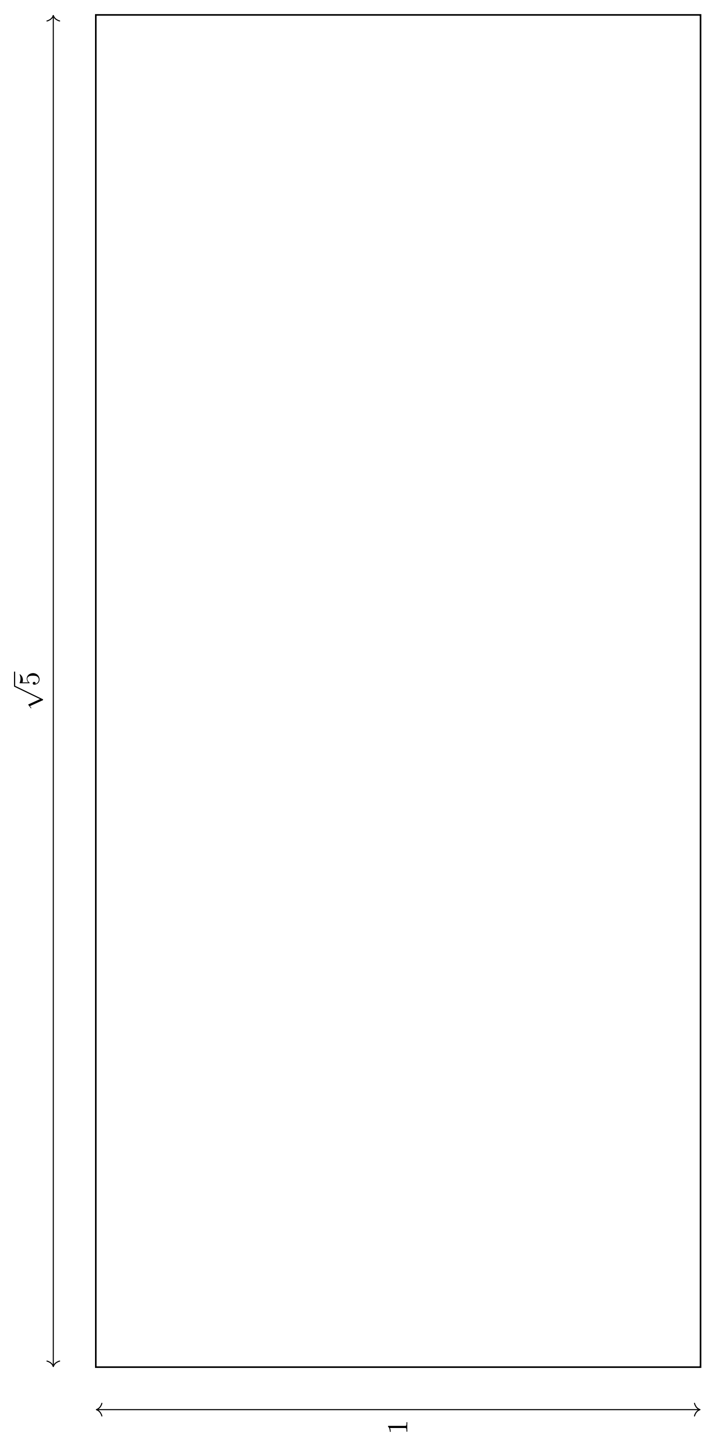


**Problema 7**

¿Es posible, siguiendo el mismo procedimiento, cubrir con cuadrados los siguientes rectángulos? ¿cuántos cuadrados tendrías que utilizar?



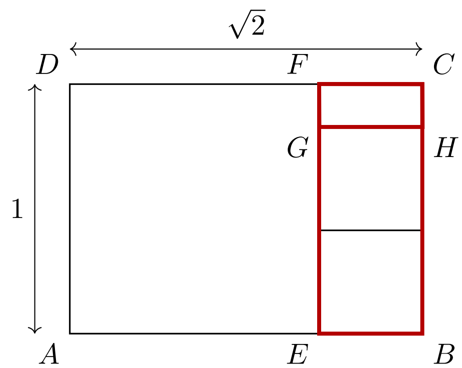




$\sqrt{5}$
1

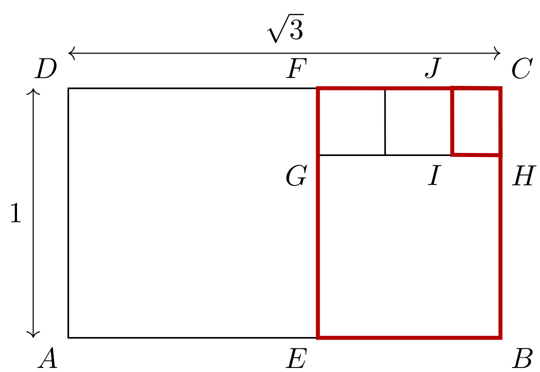
En los ejemplos anteriores, después de varias iteraciones nos damos cuenta de que hay una regularidad en la sucesión de cuadrados del mismo tamaño que se van dibujando y parece que el proceso no va a terminar nunca.

**Problema 8**

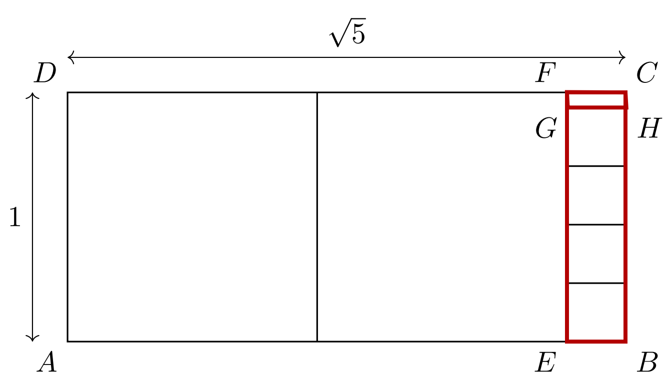
Las figuras sugieren semejanzas entre ciertos rectángulos ¿puedes comprobarlo? ¿cuál sería la fracción continua asociada a la razón entre las dimensiones en cada caso?




$EBCF$ es semejante a $FGHC$




$EBCF$ es semejante a $IHCJ$




$EBCF$ es semejante a $FGHC$

El procedimiento muestra que sumando cuadrados podemos *aproximarnos* cada vez más a los números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ pero el proceso sigue indefinidamente y la fracción continua no es finita, se trata de números irracionales.

El desarrollo en fracción continua simple de un número irracional es siempre infinito.

$$\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = [c_1, c_2, c_3, \ldots]$$

En particular, si $\alpha$ es un irracional cuadrático, es decir, soluciones de ecuaciones del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con } a \neq 0,\ b \text{ y } c \text{ números enteros,}$$

su fracción continua es periódica y su desarrollo puede hallarse de forma algebraica usando el método de Bombelli y Cataldi. Por ejemplo, como $1 < \sqrt{2} < 2$ tenemos $c_1 = \lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$ y

$$\sqrt{2} = 1 + x \quad \Rightarrow \quad 2 = (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \quad \Rightarrow \quad 1 = x(2+x) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2+x}$$

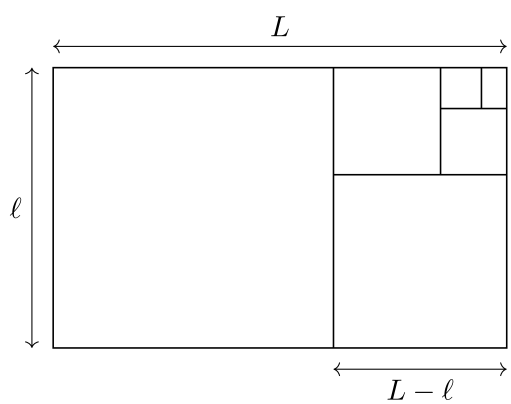
$$\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \ldots] = [1, \overline{2}]$$

**Problema 9**

Encuentra algebraicamente la fracción continua simple de $\dfrac{5+\sqrt{3}}{2}$

**Problema 10**

El siguiente rectángulo tiene la propiedad de que al quitarle un cuadrado de lado igual a su dimensión menor queda un rectángulo semejante al inicial. ¿Cuál es la razón de sus dimensiones?



Los números metálicos son irracionales cuadráticos que son soluciones de un tipo especial de ecuación

$$x^2 - mx - 1 = 0 \qquad \text{con } m \text{ entero positivo}$$

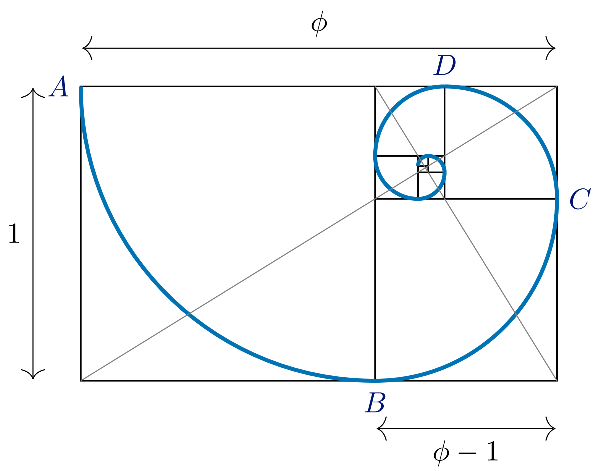
Operando algebraicamente,

$$x^2 - mx - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = mx + 1 \quad \Rightarrow \quad x = m + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad x = [\overline{m}]$$

Tomando $m = 1, 2$ y $3$ obtenemos los primeros números metálicos:

| Número de oro | Número de plata | Número de bronce |
|---|---|---|
| $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \lfloor \overline{1} \rfloor$ | $\phi_2 = 1 + \sqrt{2} = \lfloor \overline{2} \rfloor$ | $\phi_3 = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2} = \lfloor \overline{3} \rfloor$ |

La representación geométrica de un rectángulo metálico cuyas dimensiones están en las proporciones definidas por el número metálico $\phi_m$, nos dice que al quitar $m$ cuadrados de lado igual a su dimensión menor obtenemos otro rectángulo semejante al inicial.




En particular, en el rectángulo de oro podemos inscribir una espiral formada por arcos de circunferencia como en la figura.

Si el arco $AB$ tiene radio 1, el arco $BC$ es de radio $\phi - 1$, de modo que los sucesivos arcos están en progresión geométrica de razón

$$\phi - 1 = \frac{1}{\phi}$$