Estalmat Madrid
20 de mayo de 2017
Carlos Vinuesa

Invariantes

1. A un libro de 1000 páginas se le arrancan 25 hojas. ¿Es posible que la suma de los 50 números de página que aparecen en las hojas arrancadas sea 2000?

2. Tenemos 6 ceros y 5 unos escritos en una línea (en cualquier orden). Efectuamos 10 veces la siguiente operación: seleccionamos dos de los números y los cambiamos por un 0 si son iguales y por un 1 si son distintos.
¿Qué número queda al final? Si realizamos otra vez el experimento pero eligiendo otras
parejas ¿quedará el mismo número? ¿Puedes demostrarlo?

3. ¿Es posible colocar signos + y – de alguna manera en los espacios de la siguiente fórmula para que la igualdad se cumpla?

$$1\_\_\ 2\_\_3\_\_4\_\_\ \ldots\_\_99\_\_100=13^2.$$

4. Dos jugadores A, B y otras 2017 personas forman un círculo, de modo que A y B no quedan en posiciones consecutivas. A y B juegan por turnos alternadamente empezando por A. Una jugada consiste en tocar a una de las personas que se encuentra a su lado, la cual debe salir del círculo. Gana el jugador que logre sacar del círculo a su oponente. Demostrar que uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y describir dicha estrategia.

5. En cada uno de los 10 escalones de una escalera hay una rana. Cada rana puede dar un salto para llegar a cualquiera de los otros escalones, pero cuando lo hace, al mismo tiempo otra rana salta la misma cantidad de escalones pero en sentido contrario (una rana sube y la otra baja). ¿Podrán, en algún momento, quedar todas las ranas juntas en un mismo escalón?

6. En un tablero de 8×8 uno de los cuadrados está coloreado de rojo y el resto de blanco. Se permite cambiar de color todos los cuadrados de una fila o de una columna (los que estaban de rojo se pintan de blanco y los que eran blancos de rojo). ¿Se puede conseguir tener un tablero con todos los cuadrados pintados de rojo? ¿Y si tenemos un tablero 3×3 con uno de los cuadrados de sus esquinas pintado de rojo?

7. ¿Puede un caballo de ajedrez ir de una esquina a otra del tablero 8×8 pasando por todas las casillas exactamente una vez?

8. ¿Se puede cubrir, sin solapamientos, un tablero de ajedrez de 8×8 con 15 rectángulos de 1×4 cuadraditos y una pieza en forma de L de 4 cuadraditos (como las del juego TETRIS)?

9. Un tablero de 6×6 cuadrados estaba cubierto, sin solapamiento, por piezas rectangulares de 1×4 y por piezas cuadradas de 2×2. Se quitan las piezas y una de las piezas cuadradas se pierde. Se reemplaza por una rectangular ¿Es posible cubrir el tablero con las nuevas piezas, sin solapamiento?

10. En un montón hay 100 piedras. Dos jugadores A y B juegan alternadamente, comenzando por A. Cada jugador puede retirar como mínimo una y como máximo cinco piedras. Gana el que retire la última piedra. ¿Tiene alguno de ellos una estrategia ganadora? ¿Cuál es esa estrategia?

11. Tenemos dos cajas de bombones, una con 21 bombones y otra con 20. Dos jugadores juegan, haciendo, por turnos, una de estas dos operaciones:
a) Comer dos bombones de cualquiera de las dos cajas (los dos de la misma).
b) Pasar un bombón de una caja a otra.
Pierde aquel jugador que no puede efectuar jugada. ¿Qué jugador pierde?

12. Se tienen tres hormigas en tres vértices distintos de un cuadrado. En cada turno, una hormiga se puede mover en dirección paralela a la recta que determinan las otras 2. ¿Es posible que, después de algunos turnos, las hormigas ocupen 3 puntos medios de los lados del cuadrado?

13. En una isla hay 15 camaleones grises, 13 marrones y 17 rojos. Cada vez que dos camaleones de diferente color se encuentran, ambos cambian al color deltercero. ¿Es posible que después de algún tiempo todos los camaleones sean rojos? ¿Y marrones? ¿Y grises?