DIVISIBILIDAD - ESTALMAT 06/04/2013

Ya sabes lo que es un número primo y también cuando un número es divisible por otro. Hoy vas a hacer algunos ejercicios sobre estas cuestiones.

En la sesión de números primos, mediante la criba de Eratstenes, hiciste una lista de los números primos menores que 200. La lista completa era:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67,$$
$$71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137,$$
$$139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197 \text{ y } 199.$$

1. Hay parejas de números primos cuya diferencia es 2. Por ejemplo 11 y 13. Suelen llamarse primos gemelos. Escribe las parejas de primos gemelos menores que 200.
2. Obtén la suma de cada una de estas parejas ¿Ves alguna curiosidad en las sumas? Enuncia y demuestra alguna propiedad sobre la suma de primos gemelos.
3. Obtén ahora el producto de cada una de estas parejas ¿Ves alguna curiosidad en el producto? Enuncia y demuestra alguna propiedad sobre el producto de primos gemelos.
4. Llamamos números primos trillizos a aquellas ternas de números (a, b, c) con $b - a = 2$ y $c - b = 2$. ¿Cuántas ternas de primos trillizos hay? ¿por qué?

5. Completa como creas conveniente estas frases:
   a) Dos números naturales son primos entre sí si ...
   b) Si un número natural es divisible por p y q, primos entre sí, entonces es divisibles por ...
   c) Si el número pA es divisible por q siendo p y q primos entre sí, entonces A es divisible por ...

6. Si p y q son primos distintos, calcula el número de divisores de
   a) pq, b)p^2q, c)p^2q^2, d)p^nq^m.

7. Elige el mayor número que puedas para completar esta frase y luego escribe una demostración de lo que dice:
   "Yo estoy seguro que el producto de tres números naturales consecutivos es divisible por ..."

8. Recuerda que 5! (factorial de 5) es el producto $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Calcula el menor númeor natural n tal que $n!$ sea divisible por 990.

9. ¿En cuántos ceros acaba 100!? ¿Existe algún número n para el que $n!$ acabe exactamente en cinco ceros?