Estalmat Madrid
25 de febrero de 2017
Angélica Benito y
Ana Granados

El Teorema de Futurama I: Permutaciones

Permutaciones.

¿Qué es una permutación?
Una *permutación* es una reordenación de *n* objetos, que podemos considerar como una reordenación de los números {1,…,*n*}.

1. ¿Conoces algún ejemplo de permutación que no sea de números?

2. Dados 4 objetos distintos, ¿cuántas posibles permutaciones hay? ¿Y si tenemos 7? ¿Y para *n* objetos distintos?

Notación de permutaciones: **escribir las permutaciones de forma matemática**.
Empecemos con un ejemplo: tenemos 4 elementos distintos (que escribiremos como 1, 2, 3 y 4), y queremos que el 1 vaya al 4, el 3 al 1, el 4 al 3, y que el 2 se quede fijo, es decir:

$1 \rightarrow 4$
$3 \rightarrow 1$
$4 \rightarrow 3$

Lo escribimos como una *matriz de dos filas*:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

¡¡Ventajas!! Es muy fácil de entender y de ver cómo se “intercambian” los números.
¡¡Inconvenientes!! Cada vez que queramos escribir una permutación tenemos que escribir dos veces cada número… ¡qué pereza!

Pero… no haría falta escribir tanto, ¡bastaría con escribir la fila de abajo!

(4 2 1 3)

Habría una forma aún más sencilla y útil de escribir las permutaciones:

La notación de ciclos:
El ejemplo anterior, escribiríamos

(1 4 3)

Pero… ¿¡Esto qué quiere decir?!
Con esta notación, lo que queremos decir es que el 1 va al 4 que va al 3 que de vuelta va al 1, formando un ciclo.
Esta notación de ciclos tiene un significado completamente distinto a la de eliminar la fila de arriba que hemos mencionado antes (y que no vamos a volver a usar).

3. ¿¿Cualquier permutación de cuatro elementos se puede escribir como un ciclo??

4. ¿Cómo podemos resolver este problema? Fíjate en el ejemplo que has pensado, ¿qué harías?

Ejercicio 1: Escribe en forma de matriz de dos filas las siguientes permutaciones

(1 3 5) (2 7 6 8)

(1 4) (5 3) (2 9)

Ejercicio 2: ¿cuáles de las siguientes permutaciones de {1, 2, …, 8} son iguales? Escríbelas como matrices de dos filas

(1 3 5) (2 7 6 8)	(2 7 6 8) (1 3 5)	(7 6 8 2) (1 3 5)
(3 5 1) (6 8 2 7)	(8 2 7 6) (5 1 3)	(6 8 2 7) (5 1 3)

Como habrás podido ver, hay muchas formas posibles de escribir una permutación usando la notación de ciclos. Vamos a fijar la siguiente forma de describir las permutaciones:

1. Empieza por el elemento más pequeño. Si el elemento queda fijo, pasa al siguiente número. Si no queda fijo, comienza la permutación con este número como la primera entrada del ciclo y complétalo.
2. Una vez que has completado el ciclo, comprueba si hay algún otro elemento que no queda fijo, si lo hay, repite el paso 1.

En el ejercicio anterior, ¿cuál sería la forma de escribir la permutación siguiendo esta "receta"?

Combinando permutaciones.

Como hemos visto, es interesante saber escribir una permutación, pero… ¿qué pasa si queremos combinar varias de ellas? ¿En qué situaciones de la vida real se te ocurre que puedes encadenar sucesivas "reordenaciones"?

¿Qué pasa si en {1, 2, 3} empezamos con la permutación (1 2) seguida de la (1 3)? Escríbelo, si se puede, como una única permutación usando la notación de ciclos. Es decir,

$$(1\ 2)\ (1\ 3) =$$

Calcula ahora (1 3) (1 2) =

¿Es conmutativa la operación de combinar permutaciones?

Ejercicio 3: Escribe como una única permutación las siguientes combinaciones de permutaciones de {1, 2, 3, 4, 5, 6}:

(1 3 4 2) (3 6 4 5) (1 6 2 3) =

(1 2) (2 3) (3 4) (4 5) =

(1 3 5) (3 2) (5 4 3 2 1) (4 1 3) (1 3) =

Identidad.
¿Existe alguna permutación que no hace nada al combinarla con otras? (Como el 0 en la suma o resta o el 1 en el producto o división).

Inversas.
En los números enteros, dado un número, se puede encontrar su opuesto, aunque no siempre su inverso. Es decir, podemos encontrar el inverso respecto de la suma, pero no respecto de la multiplicación. Sí tenemos inversos (respecto a suma y producto) en los números racionales y en los números modulares cuando tenemos un número primo. Para las permutaciones pasa lo mismo respecto a la operación *combinación*.

Ejercicio: Calcula las siguientes inversas en {1,2, …, 6} y combínalas para ver que son inversas:
$[(1\ 3\ 4)]^{-1}$
$[\ (2\ 5\ 6)]^{-1}$
$[(1\ 3\ 4)\ (2\ 5\ 6)]^{-1}$
$[(1\ 2)\ (2\ 3)\ (3\ 4)\ (4\ 5)]^{-1}$

Algunas curiosidades de las permutaciones.

- Operación cerrada: Como habrás podido observar, cuando combinábamos varias permutaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$, obteníamos siempre una simple permutación del mismo $\{1, 2, \ldots, n\}$. Esto pasa siempre, es decir, la *combinación de dos permutaciones es una permutación*. ¿Sabrías explicar por qué?

- Asociatividad. Dadas tres permutaciones p_1, p_2 y p_3. Hay dos maneras posibles de combinarlas las tres siguiendo el orden en el que las hemos escrito:
  $p_1 [p_2\ p_3]$ y $[p_1\ p_2]\ p_3$
  En la primera combinamos primero p_2 y p_3 y combinamos p_1 con el resultado de los otros dos. En la segunda, primero combinamos p_1 y p_2, para combinar su resultado con p_3.
  ¿Importa la manera de agrupar las combinaciones de las permutaciones? La respuesta es no y por eso decimos que *combinar permutaciones es una operación asociativa*.

  Ejercicio: Calcula (1 3 4 5) (2 4 3) (1 6 3) de las dos posibles formas.

- La *operación combinar NO es conmutativa*, es decir, es muy importante el orden en el que leamos las combinaciones de las permutaciones.

  Ejercicio: Escribe un ejemplo, distinto del que vimos antes, de combinación de permutaciones que no sea conmutativo.

  Ejercicio: a pesar de la falta de conmutatividad, sí que hay casos en los que la combinación de permutaciones conmuta. Escribe un ejemplo en el que esto pasa. ¿Sabrías describir algún caso general en el que la combinación de permutaciones de ese tipo siempre conmute?

- **Transposición**.
  Una trasposición es una permutación en la que sólo se reordenan dos elementos. Por ejemplo: (1 2) ó (5 7) ó (2 6).

- *Toda permutación se puede escribir como combinación de transposiciones*. **Ejemplo**: En {1, 2, 3, 4, 5} tenemos la permutación (1 2 5). Esta permutación se puede conseguir considerando primero la transposición (1 2) y después la transposición (1 5), es decir (1 2) (1 5).

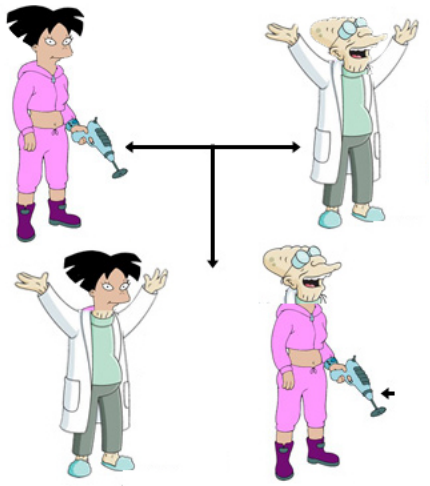
  Ejercicio: Calcula (1 2) (1 5) y comprueba que es (1 2 5).

  Ejercicio: Escribe (1 2 3 4) como producto de transposiciones en {1, 2, 3, 4, 5}.

El Teorema de Futurama

El problema (y su solución) que vamos a ver ahora, aparece por primera vez en el episodio de la serie Futurama titulado "*El prisionero de Benda*" (6x10). El guionista de este capítulo fue Ken Keeler, un doctor en matemática aplicada por la Universidad de Harvard. Keeler demostró este teorema para la serie, por ello, recibió el premio del Gremio de Guionistas de América como el mejor guion original de televisión en 2010.

El problema de Futurama: El Profesor Farnsworth y Amy deciden probar su flamante máquina "*intercambiadora de cerebros*" que acaban de inventar.



Cuando intentan volver a su cuerpo original, descubren un error clave en el diseño de la máquina: no permite que un mismo par de cuerpos entre en la máquina más de una vez.

Ejercicio: Escribe lo que acaba de ocurrir en el lenguaje de las permutaciones.

Ejercicio: ¿Pueden recuperar Amy y el Profesor su cuerpo original? ¿qué operación necesitan hacer en lenguaje matemático?

Pidiendo ayuda: El problema general que se plantea en el episodio es si existe una manera (sin inventar otra máquina, lo cual no ven posible) de recuperar los cuerpos originales. Amy y el Profesor no pueden volver a entrar juntos a la máquina, pero ¿qué pasa si le piden ayuda a Bender? ¿pueden recuperar los tres su cuerpo original? Es decir, se puede calcular $(1\ 2)^{-1}$ en {1, 2, 3} con las restricciones de la máquina.

Pregunta: ¿qué posibles permutaciones han podido ocurrir después de entrar Bender? Escríbelo usando el lenguaje de permutaciones y transposiciones (ciclos de longitud 2).

Pregunta: ¿Y si entra ahora Leela? ¿podrán recuperar su cuerpo original los cuatro? Es decir, en {1, 2, 3, 4}, existen las inversas de las permutaciones calculadas arriba.

Pregunta: Y si después del primer cambio entre Amy y el Profesor hubieran entrado Leela y Bender a la vez, ¿habría una forma de que los cuatro recuperaran su cuerpo? Es decir, existe $(1\ 2)^{-1}$ en {1, 2, 3, 4} con las restricciones de la máquina.

Juego:

1) En tu mesa de 5, coged etiquetas, ponedle vuestro nombre y un número (distinto cada uno) del 1 al 5.
2) Elige a 3 personas de tu mesa que son los que van a poder usar la máquina.
3) Siguiendo las reglas de la máquina, entrad varias veces en la máquina.
4) Escribe la permutación final que os ha quedado de dos maneras:
    a. Como combinación de las transposiciones que habéis ido haciendo.
    b. Como una única permutación final.
5) ¿Qué cuerpo y cerebro tiene cada uno?
6) ¿Podéis volver a recuperar vuestros cuerpos si ahora todos los miembros de la mesa podéis entrar a la máquina?

El problema general: CLIP.

La pregunta que se plantea en el episodio es:

Si en la máquina entran 4 o más personas, ¿existe una manera para que cada uno recupere su cuerpo original?

La respuesta es Sí, de hecho, la respuesta a esta pregunta es el llamado Teorema de Futurama o Teorema de Keeler.

Teorema: *No importa cómo un grupo de gente haya intercambiado sus mentes y sus cuerpos, siempre es posible que cada persona recupere su cuerpo usando como mucho dos personas extra*.

Vamos a probar el Teorema, pero lo vamos a hacer por pasos…

Empezamos con 4 personas (Amy, el Profesor, Bender y Leela). Siguiendo las reglas de la máquina,

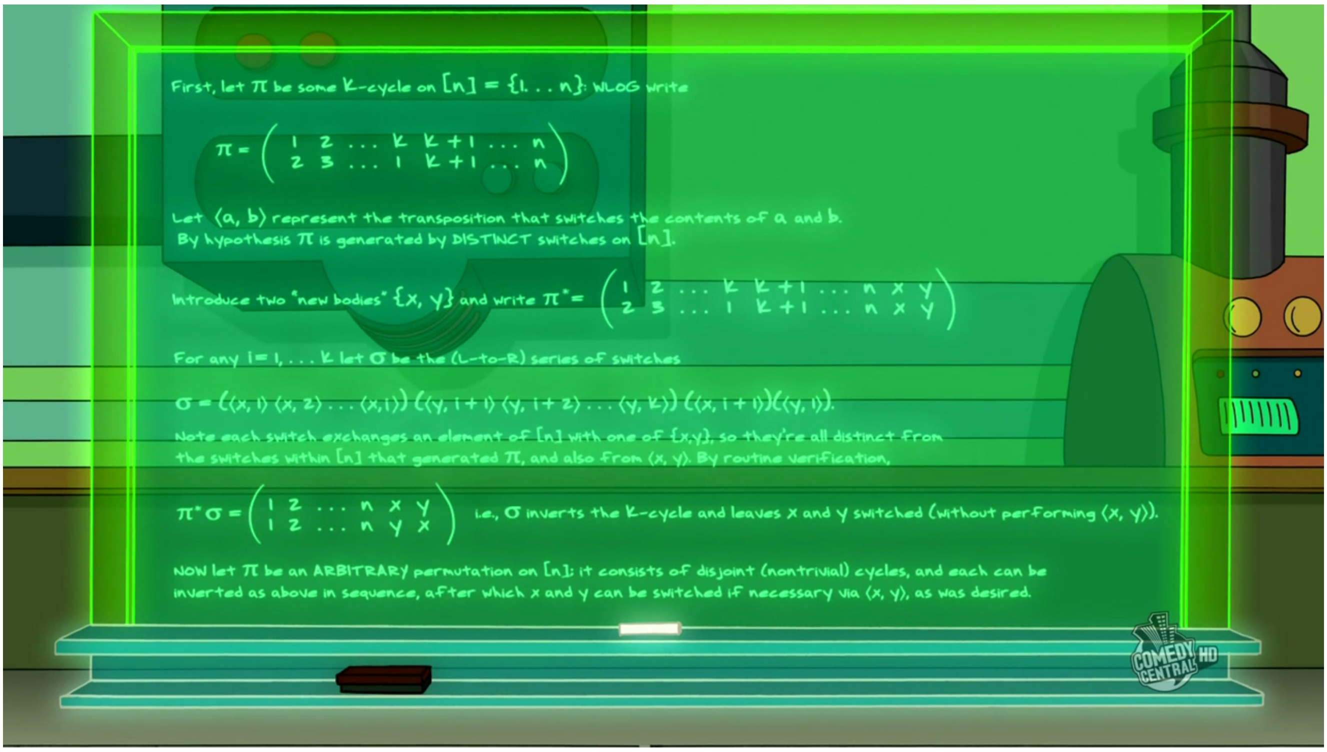
1) ¿qué permutaciones en {1, 2, 3, 4} de cuerpos/mentes son posibles?
2) ¿cuáles no se pueden dar?

Nos vamos a preocupar por el peor caso, la permutación final es (1 2 3 4). Con la ayuda de Ana y Angélica (que vamos a numerarlas como x e y), ¿cómo puedes escribir la inversa de (1 2 3 4) en {1, 2, 3, 4, x, y}?

¿Y si a la máquina entraran 5 personas y la permutación final fuera (1 2 3 4 5)? Intenta encontrar la inversa en {1, 2, 3, 4, 5, x, y}.

Juego: ¿Qué se te ocurre para n?

Imagen de la pizarra con la demostración del Teorema que aparece en el episodio “El prisonero de Benda”.



Todos los cambios de cuerpos que se realizan durante el capítulo: