Desigualdades

(1) <u>Desigualdad de Bernoulli</u>
Rellena las tres últimas columnas de la tabla siguiente. En la penúltima tienes que poner uno de los signos $\geq$, $\leq$ ó $=$

x	n entero	$(1+x)^n$		$1+nx$
1	2			
0	10			
1/2	3			
1/3	3			
-1/2	4			
-4	3			
2	3			

(2) Escribe la desigualdad que creas que es cierta a la vista de los resultados del cuadro anterior

(3) Prueba
(a) $(1,1)^{100} > 240$

(b) $(1,01)^{1000} > 240$

(4) Rellena las tres últimas columnas de la tabla siguiente. En la penúltima tienes que poner uno de los signos $\geq$, $\leq$ ó $=$

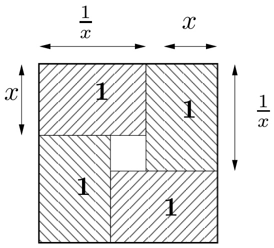
a positivo	b positivo	$\frac{a+b}{2}$		$\sqrt{ab}$
3	4			
3	3			
2	4			
10	20			
9	4			
10	10			
2	10			

(5) Escribe la desigualdad que creas que es cierta a la vista de los resultados del cuadro anterior.

¿Puedes demostrarla? (Pista: usa que $(\text{algo})^2 \geq 0$).

(6) Demuestra $x + \frac{1}{x} \geq 2$ si $x > 0$

Explica por qué el siguiente dibujo también prueba esta desigualdad (pista: fíjate en las áreas) :



(7) A la vista del dibujo anterior, ¿podrías hacer un dibujo que probase la desigualdad del ejercicio 5?

(8) Demuestra $1 + x \geq 2\sqrt{x}$ si $x \geq 0$

¿Podrías ahora probarla con un dibujo?

(9) Demuestra $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)^2 \geq \dfrac{4}{xy}$ si $x > 0$ e $y > 0$

¿Podrías ahora probarla con un dibujo?

(10) Demuestra $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$ para cualesquiera x e y

(11) Escribe la desigualdad del ejercicio 5 para cuatro números positivos, a, b, c y d. ¿Puedes demostrarla?

¿Podrías probarla mediante un dibujo?

(12) Escribe la desigualdad del ejercicio 5 para tres números positivos a, b y c. ¿Puedes demostrarla? (Esta es más difícil; puedes hacerla a partir de la desigualdad para 4, tomando $d = \sqrt[3]{abc}$)

¿Podrías probarla mediante un dibujo? (Aquí necesitarías hacer un dibujo de un cubo, y es más difícil. Puedes ayudarte de piezas de madera)

Referencias:

(1) *Mathematical circles: A Russian experience*, Fomin,D., Genkin, S., Itenberg, American Mathematical Society, 1996.
(2) *Proof without words, exercises in visual thinking*, Nelsen, R.B., The Mathematical Association of America, 1993.