Proyecto Talento Matemático
Alumnos del primer año en el Proyecto
29 de marzo del 2014
Ana Granados

Aritmética Modular I

Aritmética que se hace en un reloj en lugar de en una línea.

OPERACIONES MÓDULO 5: Dibuja un reloj con 5 horas. Dos números a y b son iguales módulo 5 si su diferencia es un múltiplo de 5. Escribiremos a (mod 5) = b.

1. Demuestra que todo número *a* es igual módulo 5 al resto de dividir el número entre 5.
2. Calcula (el resultado es siempre un número entre 0 y 4, ambos inclusive):
   a. (239 + 421) (mod 5)=
   b. (239 - 128) (mod 5) =
   c. (237 – 129) (mod 5) =
   d. (-223) (mod 5) =
   e. (239) • (128) (mod 5) =
3. Calcula (el resultado final tiene que ser un número entre 0 y 4, ambos inclusive):
   a. 83^{427} (mod 5) =
   b. 2007^{111} (mod 5) =
   c. 324^{203} (mod 5) =

4. Escribe las tablas de sumar y multiplicar con módulo 5:
   ¿Ves alguna propiedad curiosa en las tablas? Rellenando solamente las 2 primeras filas de la tabla de sumar, ¿podrías rellenar las demás? ¿Hay alguna simetría en la tabla de multiplicar?

5. ¿Se puede dividir con módulo 5? ¿Qué significa? El inverso de un número *a* módulo 5 es otro número *b* tal que *ab(mod 5) =1*. Mirando a la tabla de multiplicar del ejercicio anterior:
   a. El inverso de 1 módulo 5 es:
   b. El inverso de 2 módulo 5 es:
   c. El inverso de 3 módulo 5 es:
   d. El inverso de 4 módulo 5 es:

6. Calcula: a) 239/128 (mod 5) = b) 128/3024 (mod 5)=

OTROS MÓDULOS:

7. Rellena las tablas de la suma y del producto en módulo 6:
   A la vista de esta última, cuál sería el inverso de 1, 2, y 3. ¿Qué observas? ¿Por qué? En módulo 6, ¿Quiénes no tendrían inverso? ¿por qué? (puedes ayudarte dibujando la tabla del producto en módulo 6).

Para que la división sea siempre posible es necesario que el número con el que se trabaja sea _____

8. Calcula:
   a) 832^{45} (mod 7) **b)** 123^{213} (mod 7) **c)** Inverso de 429 (mod 7)

9. Demuestra que ningún cuadrado de un número entero puede ser cogruente con 2 módulo 3.

10. (DIVISIBIBILIDAD ENTRE 9). Calcula $10 \pmod 9$, $10^2 \pmod 9$, ..., $10^6 \pmod 9$. Trata de demostrar que un número entero es divisible entre 9 si la suma de sus cifras es divisible entre nueve (Si parece que el razonamiento general es complicado prueba con el número 4.328.438)

11. (DIVISIBIBILIDAD ENTRE 3). Calcula $10 \pmod 3$, $10^2 \pmod 3$, ..., $10^6 \pmod 3$. Trata de demostrar que un número entero es divisible entre 3 si la suma de sus cifras es divisible entre tres (Si parece que el razonamiento general es complicado prueba con el número 4.328.438).

12. (DIVISIBILIDAD ENTRE 11). Escribe un criterio de divisibilidad entre 11.

13. CUADRADOS MÁGICOS. Explicarlos. Construir 3x3, 4x4, 7x7 … usando aritmética modular. ¿Hay cuadrados mágicos 2x2?

14. a) Calcula $a^4 \pmod 5$ para todo número a = 1, 2, 3, 4.
    b) Calcula $a^5 \pmod 6$ para todo número a = 1, 2, 3, 4, 5.
    c) Calcula $a^6 \pmod 7$ para todo número a = 1, 2, 3, 4, 6, 7.

15. Demuestra que $a^4 \pmod 5 = 1$ para todo número a que no sea múltiplo de 5.

PEQUEÑO TEOREMA DE FERMAT: Si p es un número primo, $a^{p-1} \pmod p$ para todo número a que no sea múltiplo de p.

16. Usando el Pequeño Teorema de Fermat calcula $45^{31} \pmod{31}$.


Karl Friedrich Gauss, 1777-1855

Referencia: J. Dorronsoro, E. Hernández, *Números, grupos y anillos*, Addison-Wesley Iberoamericana/UAM, 1996 (sección 2.4).
Imagen: http://britton.disted.camosun.bc.ca/modart/jbmodart.htm