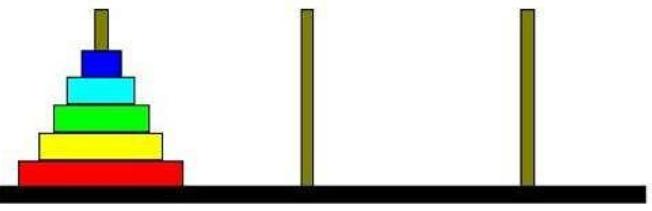


Inducción II
3 de marzo de 2012

1. Demuestra que las siguientes fórmulas son ciertas:
 - a. $4^n - 1$ es múltiplo de 3
 - b. $4^n + 15n - 1$ es divisible por 9
2. Problema de la invención del ajedrez. Cuenta la leyenda que lo inventó en una sola noche un primer ministro de un país oriental. Se lo enseñó al rey a la mañana siguiente, y al rey le gustó tanto que le ofreció al primer ministro el premio que él quisiera. Tras pensarla, el ministro dijo que sólo quería un grano de trigo en la primera casilla del tablero, dos en la segunda, cuatro en la tercera ... y así sucesivamente, en cada casilla el doble de grano de trigos que en la casilla anterior. El rey se rió ... hasta que vino el jefe de almacén a darle el trigo al ministro y se dieron cuenta de que no había suficiente trigo ... ¡en todo el mundo! Harían falta 18446744073709551615 granos de trigo.
 ¿Cómo se calcula este número? ¿Cuántos granos harían falta si un tablero de ajedrez tuviera sólo una casilla? ¿y 2? ¿y 3? ¿y 10x10? Escribe una fórmula matemática que diga cuánto valdría la suma para un tablero con n casillas, y demuestra que esa fórmula se cumple, para cualquiera que sea n .
3. Tenemos un plano donde hay algunas líneas rectas, de forma que no hay ninguna paralela a ninguna otra, y tampoco hay tres rectas que se corten en un mismo punto. ¿En cuántas regiones distintas queda dividido el plano? (Piensa qué ocurriría si hubiese una sola recta ... ¿y si hay dos? ¿tres? ¿cuatro? ¿cinco? ¿Ves alguna regularidad? Piensa en si podrías escribir una fórmula matemática para ese número de regiones. ¿Puedes demostrar que la fórmula se cumple *siempre*, para cualquier número de rectas?)
4. El juego de las torres de Hanoi. En la varilla 1 hay cinco discos de madera de diámetros decrecientes. Se quieren llevar a la varilla 3 (derecha) respetando las siguientes reglas:
 - a. No se puede desplazar más de un disco en cada movimiento
 - b. Un disco sólo puede descansar en otro de diámetro mayor

¿Puedes demostrar que este juego tiene solución (sea cual sea el número n de discos) y que, además, esta solución se puede conseguir haciendo $2^n - 1$ movimientos?
5. Vamos a ir más allá. Cuenta la leyenda que hay unos monjes encerrados en un monasterio perdido en el corazón de Asia desde hace miles de años. Estos monjes llevan todo este tiempo jugando al juego de las torres de Hanoi con 64 aros, y dice la leyenda que, cuando estos monjes terminen el juego, llegará sin remedio el fin del mundo. Vaya miedo. Para tranquilizarnos, vamos a demostrar que es *imposible* acabar el juego (para n discos) en menos de $2^n - 1$ movimientos. Entonces, aunque moviesen un aro cada segundo, los monjes necesitarían 18446744073709551615 segundos para terminar (nos 566000 millones de años.....). Vamos a demostrar por inducción que el juego no se puede acabar en menos de $2^n - 1$ movimientos.