Variable Real 2024-25: Grado en Matemáticas

Temas para el examen final

1. Los espacios $L^p(X,\mu)$. Las desigualdades de Hölder y Minkowski.

a) Definir los espacios $L^p(X,\mu), 1 \le p < \infty$, como clases de equivalencia y probar que son espacios vectoriales.

b) Enunciar y probar la desigualdad de Hölder.

c) Probar que $L^p(X,\mu), 1 \le p < \infty$ es un espacio normado.

2. Relaciones entre los espacios $L^p(X,\mu)$.

a) Demostrar que si $1 \le p < q < r < \infty$ y $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1-\theta}{p} + \dfrac{\theta}{r}$, con $0 < \theta < 1$, se tiene que $\|f\|_q \le \|f\|_p^{1-\theta}\|f\|_r^{\theta}$.

b) Probar que si $1 \le p < q < r < \infty$ se cumple que $L^p(X,\mu) \cap L^r(X,\mu) \subset L^q(X,\mu)$.

c) Si $\mu(X) < \infty$ y $1 \le p < q < r < \infty$, demostrar que $L^q(X,\mu) \subset L^p(X,\mu)$ y que la inclusión es estricta.

3. Funciones convexas. Desigualdad de Jensen.

a) Definición de función convexa en un intervalo.

b) Enunciar y demostrar la desigualdad de Jensen para espacios de medida 1 y funciones convexas continuas.

c) Usar la desigualdad de Jensen para probar que la media geométrica de n números reales positivos $y_1, y_2, \ldots, y_n$ es menor o igual que su media aritmética.

4. Convolución de dos funciones definidas en $\mathbb{R}^n$.

a) Definir la convolución de dos funciones definidas en $\mathbb{R}^n$ y enunciar sus propiedades elementales

b) Enunciar y demostrar la desigualdad de Young para la convolución de dos funciones (no olvidar los casos $p = 1$ y $p = \infty$).

5. Aproximación de funciones mediante convoluciones.

Sea $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1, \phi \ge 0$ y definir $\phi_t(x) = \dfrac{1}{t}\phi(\dfrac{x}{t})$.

a) Demostrar que si f es acotada y uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$, $f * \phi_t \to f$ uniformemente cuando $t \to 0^+$.

b) Demostrar que si $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \le p < \infty$, entonces $f * \phi_t \to f$ en la norma de $L^p(\mathbb{R}^n)$ cuando $t \to 0^+$.

6. El teorema de diferenciación de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

a) Enunciar el teorema de diferenciación de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y dar una demostración para funciones continuas.

b) Definir el operador maximal de Hardy-Littlewood y mostrar que no es acotado de $L^1(\mathbb{R})$ en $L^1(\mathbb{R})$.

c) Demostrar el teorema de diferenciación de Lebesgue a partir de la acotación débil del operador maximal de Hardy-Littlewood.

7. **Producto escalar y espacios de Hilbert.**
a) Definir el concepto de producto escalar en un espacio vectorial complejo y normado $\mathbb{H}$. Enunciar y demostrar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.
b) Definir el concepto de espacio de Hilbert.
c) Enunciar y demostrar la propiedad de mínima distancia del origen a un subconjunto cerrado y convexo de un espacio de Hilbert.

8. **Bases en un espacio de Hilbert.**
a) Definición de sistema ortonormal en un espacio de Hilbert y ejemplos.
b) Enunciar y demostrar la desigualdad de Bessel para un sistema ortonormal numerable en un espacio de Hilbert.
c) Definir el concepto de base en un espacio de Hilbert y enunciar resultados equivalentes.

9. **Series de Fourier.**
a) Definir coeficiente de Fourier y serie de Fourier.
b) Las sumas parciales de la serie de Fourier y el núcleo de Dirichlet.
c) Sumabilidad Cesàro de series de Fourier: el núcleo de Fejér.

10. **Criterios de convergencia puntual para series de Fourier.**
a) Enunciar y demostrar el criterio de Dini.
b) Enunciar y demostrar un resultado de convergencia para la serie de Fourier de una función en un punto de discontinuidad.

11. **La transformada de Fourier de funciones de $L^1(\mathbb{R})$.**
a) Definir transformada de Fourier de una función de $L^1(\mathbb{R})$.
b) Enunciar y demostrar el lema de Riemann-Lebesgue.
c) Propiedades de la transformada de Fourier: comportamiento respecto a la convolución, la traslación, la modulación y la dilatación. Incluir al menos tres demostraciones.

12. **La transformada de Fourier y la clase de Schwartz.**
a) Escribir la fórmula de inversión de la transformada de Fourier con las hipótesis adecuadas.
b) Definir la clase de Schwartz en $\mathbb{R}$ y demostrar que esta clase está contenida en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$.
c) Escribir y demostrar los teoremas de Parseval y Plancherel para la transformada de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

13. **Resultados con la transformada de Fourier.**
a) Enunciar la fórmulta de sumación de Poisson y demostrarla.
b) Enunciar el teorema de muestreo de Whittaker-Shannon y demostrarlo.