VARIABLE REAL. 4º DE MATEMATICAS *Curso 2024/25 (E. Hernández)*

HOJA 5 DE PROBLEMAS

1. Hallar la serie de Fourier de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = x$ en $-\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2}$. $\left[\ f(x) \sim \sum_{n\neq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i n}\, e^{2\pi i n x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, \frac{\operatorname{sen} 2\pi n x}{\pi n}\ \right]$

   b) $g(x) = \frac{(1-2x)^2}{16}$ en $0 \le x < 1$. $\left[\ g(x) \sim \frac{1}{48} + \sum_{n\neq 0} \frac{1}{8\pi^2 n^2}\, e^{2\pi i n x} = \frac{1}{48} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{4\pi^2 n^2}\ \right]$

   c) $h(x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi\alpha}\, e^{i(\pi - x)\alpha}$ en $0 \le x < 2\pi$, $\alpha \notin \mathbb{Z}$. $\left[\ h(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n+\alpha}\, e^{inx}\ \right]$

2. Calcular las series de Fourier de las siguientes funciones (en todos los casos las funciones se definen en $[0, 1)$ y se consideran 1-periódicas):

   i) $f_1(x) = \operatorname{sen}(4\pi x)\, \cos(2\pi x)$ ii) $f_2(x) = e^x$ iii) $f_3(x) = \cosh(x)$

3. *a*) Sea $f(x) = -\frac{1}{2} - x$ si $-\frac{1}{2} \le x \le 0$ y $f(x) = \frac{1}{2} - x$ si $0 < x < \frac{1}{2}$. Hallar sus coeficientes de Fourier y demostrar que $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2\pi n x}{\pi n}$.

   b) Sea $g(x) = -1$ si $-\frac{1}{2} \le x \le 0$ y $f(x) = 1$ si $0 < x < \frac{1}{2}$. Hallar sus coeficientes de Fourier y demostrar que $g(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \operatorname{sen}(2\pi(2k-1)x)$.

4. Sea $f(x) = x(\frac{1}{2} - x)$ en $[0, \frac{1}{2}]$ extendida de manera impar a $[-\frac{1}{2}, 0]$

   a) Dibujar la gráfica de f.

   b) Calcular los coeficientes de Fourier de f y demostrar que $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 \operatorname{sen}(2\pi(2k+1)x)}{\pi^3 (2k+1)^3}$.

5. En el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ considerar la función de la forma $f(x) = 0$ si $|x| > \delta$ ($\delta < \frac{1}{2}$) y $f(x) = 1 - \frac{|x|}{\delta}$ si $|x| \le \delta$. Dibujar la gráfica de f y demostrar que

$$f(x) = \delta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(2\pi n \delta)}{\delta \pi^2 n^2} \cos(2\pi n x) .$$

6. Sea f la función definida en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ mediante $f(x) = |x|$.

   a) Dibujar la gráfica de f.

   b) Calcular los coeficientes de Fourier de f y demostrar que $\widehat{f}(0) = \frac{1}{4}$ y $\widehat{f}(n) = \frac{(-1)^n - 1}{2\pi^2 n^2}$ si $n \neq 0$.

   c) ¿ Cuál es la serie de Fourier de f en términos de senos y cosenos ?

   d) Tomando $x = 0$ demostrar que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

7. Utilizar la identidad de Plancherel y los resultados de los apartados $b)$ y $c)$ del ejercicio 1 para probar

$$i)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90} \qquad\qquad ii)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+\alpha)^2}=\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi\alpha)}\,,\ \alpha\notin\mathbb{Z}\,.$$

8. Utilizar el ejercicio 4 y la identidad de Plancherel para demostrar que

$$i)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^6}=\frac{\pi^6}{960} \qquad\qquad ii)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}\,.$$

9. Utilizar el ejercicio 6 y la identidad de Plancherel para demostrar que

$$i)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^4}{96} \qquad\qquad ii)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}\,.$$

10. Sea F_N el N-ésimo núcleo de Fejér: es decir $F_N(x)=\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}D_k(x)$, donde D_N es el N-ésimo núcleo de Dirichlet.

    $a)$ Calcular los coeficientes de Fourier de F_N.

    $b)$ Probar que para todo $j\in\mathbb{Z}$, $\lim_{N\to\infty}\widehat{F_N}(j)=1$.

    $c)$ Probar que $\lim_{N\to\infty}\|F_N\|_2=\infty$.

    $d)$ Calcular $\lim_{N\to\infty}\frac{\|F_N\|_2}{\|D_N\|_2}$.

11. Probar que $\widehat{(f*g)}(n)=\widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$ para toda $f,g\in L^1(\mathbb{T})$. Deducir que si P es un polinomio trigonométrico (combinación lineal finita de exponenciales), entonces también lo es $P*f$ para toda $f\in L^1(\mathbb{T})$.

12. Demostrar que los coeficientes de Fourier de una función continua pueden tender a cero tan lentamente como se desee probando que para cualquier sucesión de números reales no negativos $(\epsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ que converja a cero existe una función continua f tal que $|\widehat{f}(n)|=\epsilon_n$ para una cantidad infinita de valores de n. (Indicación: elegir una subsucesión $(\epsilon_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ tal que $\sum_k \epsilon_{n_k}<\infty$)

13. $a)$ Demostrar que la integral impropia $\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\,dx$ es convergente mayorándola por una serie alternada.

    $b)$ Demostrar que $\int_0^{\infty}\left|\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right|dx=\infty$.

    $c)$ Demostrar que $\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$ integrando $e^{-xy}\operatorname{sen}x$ con respecto a x y con respecto a y (esto es un ejercicio de cálculo de integrales dobles).

14. Probar (de manera diferente a la del ejercicio 13) que $\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}$ aplicando el lema de Riemann-Lebesgue a la función $g(x)=\frac{1}{\operatorname{sen}(\pi x)}-\frac{1}{\pi x}$ en $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ y extendida a $\mathbb{R}$ de manera periódica.