VARIABLE REAL. 4º DE MATEMATICAS *Curso 2024/25 (E. Hernández)*

HOJA 4 DE PROBLEMAS

1. La expresión $< f, g >= \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\, dx$ define un producto escalar en $C([0,1])$. Demostrar que $C([0,1])$ con este producto escalar **no** es un espacio de Hilbert.

2. Demostrar que en un espacio pre-Hilbert se cumple la **identidad de polarización**:
$$< x, y >= \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right] .$$

3. Si $(\mathbb{H}, < \, , \, >)$ es un espacio pre-Hilbert, demostrar que para todo $x \in \mathbb{H}$ se cumple
$$\|x\| = \sup_{\|y\|=1} | < x, y > | .$$

4. *a*) Demostrar que la norma $\|f\|_\infty$ definida en $L^\infty([0,1])$ no puede provenir de un producto escalar.
   b) Demostar que $L^2([0,1])$ es el único espacio de Hilbert de entre todos los espacios $L^p([0,1]),\ 0 < p < \infty$.
   (Indicación: probar que no se cumple la ley del paralelogramo)

5. Demostrar que el conjunto
$$\mathcal{U} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{\pi}} : n = 1, 2, 3, \dots \right\}$$
es una base ortonormal de $L^2([-\pi\, , \, \pi])$. (Indicación: usar que $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de $L^2([-\pi\, , \, \pi])$.

6. Demostrar que cada uno de los conjuntos
$$\mathcal{U}_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx : n = 1, 2, 3, \dots \right\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{U}_2 = \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} nx . n = 1, 2, 3, \dots \right\}$$
es una base ortonormal de $L^2([0\, , \, \pi])$. (Indicación: como en el ejercicio anterior.)

7. Sean $C_0^{(N)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $C_k^{(N)} = \left(\cos(\frac{k\pi}{N}\frac{2m+1}{2})\right)_{m=0}^{N-1}$, $k = 1, \dots, N-1$. Demostrar que los vectores
$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{N}}\, C_k^{(N)} : k = 0, 1, \dots, N-1 \right\}$$
forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^N$. (Indicación: Demostrar $\sum_{m=0}^{N-1} \cos(\frac{k\pi}{N}\frac{2m+1}{2}) = 0$ para $k = 1, 2, \dots, 2N-1$ usando la fórmula $2\cos\alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}$)

8. Sea $T_n(x)$ el polinomio de Chevyshev de grando n, es decir,
$$T_0(x) = 1\, , \qquad T_n(x) = 2^{1-n}\cos(n \arccos x)\, ,\ n = 1, 2, 3, \dots .$$
Chevyshev probó que $T_n(x)$ es un polinomio de grado n.

a) Demostrar que $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ es un sistema ortogonal de $L^2([-1,1])$ con el producto escalar dado por

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx\,.$$

b) Demostrar que $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una base ortonormal de $L^2([-1,1])$, donde

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,, \qquad \phi_n(x) = \frac{2^n}{\sqrt{2\pi}}\, T_n(x)\,,\ n = 1,2,3\ldots$$

9. Los polinomios de Legendre se definen mediante

$$P_0(x) = 1\,, \qquad P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\, \frac{d^n}{dx^n}\,(x^2-1)^n\,,\ n = 1,2,3,\ldots$$

a) Demostrar que $\{P_n : n = 0,1,2,\ldots\}$ forman un sistema ortogonal de $L^2([-1,1])$. (Indicación: usar integración por partes para probar $\int_{-1}^{1} P_n(x)\, x^m\, dx = 0$ si $n > m$)

b) Demostrar que

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\, dx = \int_{-1}^{1} (1-x)^n\,(1+x)^n\, dx = \frac{(n!)^2\; 2^{2n+1}}{(2n)!\;(2n+1)}$$

usando integración por partes.

c) Usar los apartados anteriores para demostrar que $\{\sqrt{n+\frac{1}{2}}\;\, P_n : n = 0,1,2,\ldots\}$ forman un sistema ortonormal de $L^2([-1,1])$.

10. Calcular min $\{\int_{-1}^{1} |x^3 - a - bx - cx^2|^2\, dx\ :\ a,b,c \in \mathbb{R}\}$. (Indicación: usar una base ortonormal de los polinomios de grado menor o igual a 2 en $L^2([-1,1])$ - ver el ejercicio anterior.)

11. Sea $(\mathbb{H}, <\ ,\ >)$ un espacio de Hilbert.

a) Si M is un subespacio vectorial cerrado de $\mathbb{H}$, demostar que $(M^{\perp})^{\perp} = M$.

b) Sea $\mathcal{U} = \{u_\alpha\}_\alpha$ un sistema ortonormal **no** finito. Demostrar que $\mathcal{U}$ es un conjunto cerrado y acotado, pero no compacto.

c) Si $x_0 \in \mathbb{H}$ y M es un subespacio vectorial cerrado de $\mathbb{H}$, demostar que

$$\min\,\{\|x_0 - x\| : x \in M\} = \max\,\{\,|< x_0, y >| :\ y \in M^{\perp}\ ,\ \|y\| = 1\}\,.$$

12. Considerar las funciones

$$f_{n,k}(x) = e^{2\pi i n x}\chi_{[k,k+1]}(x)\,,\ x \in \mathbb{R},\ n,k \in \mathbb{Z}.$$

Probar que el conjunto $\{f_{n,k} : n,k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ con el producto escalar dado por

$$\langle f, g\rangle_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)} dx\,.$$

(Indicación: usar que $\{e^{2\pi i n x}\chi_{[k,k+1)} : n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de $L^2([k,k+1))$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.)