

HOJA 3 DE PROBLEMAS

1. Sea $c_0(\mathbb{N})$ el espacio de sucesiones $\mathbf{a} = (a_n)_{n=1}^\infty$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$. Demostrar que si $0 < p < \infty$ se cumple que $\ell^p(\mathbb{N})$ es un subespacio denso de $c_0(\mathbb{N})$, dotado éste con la norma $\|\cdot\|_\infty$.
2. Supongamos que $\mathbf{a} = (a_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión de números reales con la propiedad de que

$$S := \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| : \|\mathbf{b}\|_2 = 1 \right\} < \infty$$

Demostrar que $\mathbf{a} \in \ell^2$ y $\|\mathbf{a}\|_2 = S$.

3. Sea $h = \chi_{(0,1)}$
 - a) Calcular y dibujar $h * h$.
 - b) Calcular y dibujar (con ordenador si te hace falta) $h * h * h$.

4. (**Forma general de la desigualdad de Young**) Sean $1 \leq p, q, r \leq \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$. Demostrar que si $f \in L^p$ y $g \in L^q$ se cumple que $f * g \in L^r$ y

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

(Indicación: observar que $(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}) + (\frac{1}{q} - \frac{1}{r}) + \frac{1}{r} = 1$ y usar la desigualdad de Hölder para probar que

$$|f * g(x)| \leq \|f\|_p^{\frac{r-p}{r}} \|g\|_q^{\frac{r-q}{r}} \left(\int |f(y)|^p |g(x-y)|^q dy \right)^{1/r};$$

después usar el teorema de Fubini para acotar $\|f * g\|_r$.)

5. Sea $C_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ continua y } \lim_{|x| \rightarrow \infty} |f(x)| = 0\}$.
 - a) Demostrar que $C_c(\mathbb{R})$ es denso en $C_0(\mathbb{R})$ con la topología de $\|\cdot\|_\infty$.
 - b) Demostrar que $C_c^\infty(\mathbb{R})$ es denso en $C_0(\mathbb{R})$ con la topología de $\|\cdot\|_\infty$. (Indicación: usar el apartado (a) y el teorema de regularización de funciones mediante convoluciones)
6. Sean A y B dos espacios vectoriales normados y $T : A \rightarrow B$ un operador lineal. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
 - a) T es Lipschitz, es decir, existe $C < \infty$ tal que $\|Tx - Ty\|_B \leq C\|x - y\|_A$ para todo $x, y \in A$.
 - b) T es continuo para todo $x \in A$.
 - c) T es continuo en $x = 0 \in A$.
 - d) T es acotado, es decir, existe $C < \infty$ tal que $\|Tx\|_B \leq C\|x\|_A$ para todo $x \in A$.
7. Sea $T : L^1(X, \mu) \rightarrow L^1(X, \mu)$ un operador lineal y acotado. Demostrar que existe $C < \infty$ tal que para toda $f \in L^1(X, \mu)$ se tiene

$$\mu(\{x \in X : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1.$$

8. A partir del teorema de **Hardy-Littlewood** y usando la desigualdad de Jensen probar que si $p \in [1, \infty)$ existe $C < \infty$ tal que para toda $f \in L^p(\mathbb{R})$ y para todo $\lambda > 0$ se cumple que

$$|\{x \in \mathbb{R} : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}} |f(y)|^p dy,$$

donde M es la función maximal de Hardy-Littlewood.

9. Describir la función maximal de Hardy-Littlewood Mf para $f(x) = \chi_{(-1,1)}(x)$. Usar este resultado para probar que el operador maximal de Hardy-Littlewood M no está acotado de $L^1(\mathbb{R})$ en $L^1(\mathbb{R})$.
10. Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida σ -finito y $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ medible. Se llama **función de distribución** de f a la función $\sigma_f : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ definida por

$$\sigma_f(\lambda) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}).$$

- a) Demostrar que $\|f\|_{L^1(X, \mu)} = \|\sigma_f\|_{L^1(0, \infty)}$.
- b) Describir y dibujar la función de distribución de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f = 5\chi_{(-3, -2)} + 2\chi_{(0, 2)} - 3\chi_{(4, 7)}$$

11. Sean p y q exponentes conjugados con $1 \leq p < \infty$. Si $f \in L^p(X, \mu)$, demostrar que

$$\|f\|_p = \sup \left\{ \left| \int_X f \bar{g} d\mu \right| : \|g\|_q = 1 \right\}$$

(Indicación: para demostrar \geq usar la desigualdad de Hölder; para probar \leq tomar $g_0(x) = |f(x)|^{p-2} f(x) / \|f\|_p^{p-1}$ cuando sea posible y $g_0(x) = 0$ si $f(x) = 0$.)

12. (**Desigualdad integral de Minkowski**) Sean (X, μ) e (Y, ν) dos espacios de medida σ -finitos y $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ una función medible. Si $1 \leq p \leq \infty$, $f(\cdot, y) \in L^p(X, \mu)$ c.t. $y \in Y$ y la función $y \rightarrow \|f(\cdot, y)\|_p$ pertenece a $L^1(Y, \nu)$, demostrar que se cumple:

$$\left\| \int_Y f(\cdot, y) d\nu(y) \right\|_{L^p(X, \mu)} \leq \int_Y \|f(\cdot, y)\|_{L^p(X, \mu)} d\nu(y).$$

(NOTA: esta desigualdad se puede leer de la siguiente manera: la norma de una integral es menor o igual que la integral de las normas)

(Indicación: usar el ejercicio anterior y la desigualdad de Hölder)

13. Sea $K : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ medible tal que $K(\lambda x, \lambda y) = \frac{1}{\lambda} K(x, y)$ para todo $\lambda > 0$ y $\int_0^\infty |K(x, 1)| x^{-1/p} dx = C < \infty$ para algún $p \in (1, \infty)$. Sea q el exponente conjugado de p . Para $f \in L^p$ y $g \in L^q$ definir

$$Tf(y) = \int_0^\infty K(x, y) f(x) dx \quad \text{y} \quad Sg(x) = \int_0^\infty K(x, y) g(y) dy.$$

- a) Demostrar que T es un operador acotado de $L^p(0, \infty)$ en $L^p(0, \infty)$.
- b) Demostrar que S es un operador acotado de $L^q(0, \infty)$ en $L^q(0, \infty)$.

(Indicación: para el apartado (a) hacer el cambio de variable $z = x/y$ y después utilizar la desigualdad integral de Minkowski. Hace algo similar para el apartado (b).)

14. (**Desigualdad de Hilbert**) Demostrar que el operador

$$Tf(y) = \int_0^\infty \frac{f(x)}{x+y} dx$$

es acotado de $L^p(0, \infty)$ en $L^p(0, \infty)$ para todo $p \in (1, \infty)$. (Indicación: usar el ejercicio anterior)