VARIABLE REAL. 4º DE MATEMATICAS *Curso 2024/25 (E. Hernández)*

HOJA 2 DE PROBLEMAS

1. Sea $\mu(X) = 1$ y f y g dos funciones positivas y medibles con $f(x)g(x) \geq 1$ c.t.p.. Usar la desigualdad de Hölder para probar
$$1 \leq \left(\int_X f \, d\mu \right) \left(\int_X g \, d\mu \right) .$$

2. Probar por inducción la siguiente generalización de la desigualdad de Hölder: dados $1 < p_1, p_2, \ldots, p_n < \infty$ con $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1$ y $f_i \in L^{p_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, se cumple
$$\int_X |f_1 \, f_2 \, \ldots f_n| \, d\mu \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \ldots \|f_n\|_{p_n} .$$

3. Sea $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ y $0 < p < q < \infty$. Demostrar que $L^p((a, b)) \neq L^q((a, b))$.

4. Sean $1 \leq p, q \leq \infty$ exponentes conjugados. Si $f_n \to f$ en la norma de $L^p(\mu)$ y $g_n \to g$ en la norma de $L^q(\mu)$, demostrar que $f_n \, g_n \to f \, g$ en la norma de $L^1(\mu)$.

5. Encontrar $f, f_n \in L^p([0, 1])$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $1 \leq p < \infty$ tales que
   a) $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$ cuando $n \to \infty$.
   b) $\{f_n(x)\}_n$ es una sucesión no convergente para todo $x \in [0, 1]$.

6. Usar la desigualdad de Hölder para probar:
$$\int_0^\pi x^{-1/3} \operatorname{sen} x \, dx < 3 .$$

7. *a*) Encontrar un espacio de medida (X, μ) y una función $f \in \bigcap_{p<r<\infty} L^r \setminus L^p$.
   b) Encontrar un espacio de medida (X, μ) y una función $f \in \bigcap_{0<r<p} L^r \setminus L^p$.

   Indicación: intentar con funciones de la forma $f(x) = x^{-1/p}$ en espacios de medida apropiados.

8. *a*) Encontrar un espacio de medida (X, μ) y una función $f \in L^p \setminus \bigcup_{p<r<\infty} L^r$.
   b) Encontrar un espacio de medida (X, μ) y una función $f \in L^p \setminus \bigcup_{0<r<p} L^r$.

   Indicación: intentar con funciones de la forma $f(x) = x^{-1/p} \, |\log x|^{-2/p}$ en espacios de medida apropiados.

9. *a*) Suponiendo $\mu(X) = 1$ y $f \in L^\infty(\mu)$, demostrar que $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.
   b) Demostrar el mismo resultado que en el apartado anterior pero suponiendo que $\mu(X) < \infty$.
   c) Suponiendo $\mu(X) < \infty$ y $f \in L^q(X)$ para algún $q > 1$, demostrar que $\lim_{p\to 1} \|f\|_p = \|f\|_1$.

10. En $[0, 1)$ se consideran los intervalos diádicos $I_{j,k} = [\frac{j-1}{2^k} , \frac{j}{2^k})$ con $j = 1, 2, \ldots 2^k$, $k \in \mathbb{N}$. Si $f \in L^p((0, 1))$, $1 \leq p < \infty$, y
$$f_k(x) = \sum_{j=1}^{2^k} \left(\frac{1}{|I_{j,k}|} \int_{I_{j,k}} f(y) \, dy \right) \chi_{I_{j,k}}(x) ,$$
demostrar:

a) $\|f_k\|_p \leq \|f\|_p$.

b) Si $f \in C_c((0,1))$, $\|f - f_k\|_p \to 0$ cuando $k \to \infty$.

c) Si $f \in L^p((0,1))$, $\|f - f_k\|_p \to 0$ cuando $k \to \infty$ (Usar que $C_c((0,1))$ es denso en $L^p((0,1))$).

11. Utilizar la desigualdad de Jensen para dar una demostración de que si $1 \leq p < q < \infty$ y $\mu(X) < \infty$ se cumple $L^q(X,\mu) \subset L^p(X,\mu)$.

12. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intevalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua tal que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

para todo $x, y \in I$. Demostrar que f es convexa en I. Indicación: todo $\lambda \in (0,1)$ puede aproximarse por números de la forma $\frac{m}{2^n}$ con $0 \leq m < 2^n$, $n \in \mathbb{N}$.