

HOJA 1 DE PROBLEMAS

1. Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida y $A, B, A_k \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N}$. Demostrar:
 - a) $\mu(A) \leq \mu(B)$ si $A \subset B$. Si, además, $\mu(A) < \infty$, $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.
 - b) $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.
 - c) $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \mu(A)$ si $A_k \uparrow A$.
 - d) $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \mu(A)$ si $A_k \downarrow A$ y $\mu(A_1) < \infty$.
2. Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida.
 - a) Demostrar que $f : X \mapsto \mathbb{R}$ es medible $\iff \{x \in X : f(x) > r\} \in \mathcal{A} \quad \forall r$.
 - b) Demostrar que si $f_n : X \mapsto \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, son medibles también lo son las funciones $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_n f_n$ y $\liminf_n f_n$.
 - c) Demostrar que si $f_n : X \mapsto \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, son medibles y $f_n(x) \rightarrow f(x)$ puntualmente, entonces f es medible.
3. Sea X un conjunto no numerable y sea $\mathcal{A} = \{E \subset X : E \text{ ó } E^c \text{ es numerable o finito}\}$. Definimos $\mu(E) = 0$ si E es numerable o finito y $\mu(E) = 1$ si lo es E^c , para cada $E \in \mathcal{A}$. Probar que \mathcal{A} es una σ -álgebra y que (X, \mathcal{A}, μ) es un espacio de medida.
4. Probar que la desigualdad del Lema de Fatou puede ser estricta.
Indicación: Considera (X, \mathcal{A}, μ) con $\mu(X) < \infty$, $E \in \mathcal{A}$, con $0 < \mu(E) < \mu(X)$ y definir $f_n = \chi_E$, si n es impar y $f_n = \chi_{E^c}$ si n es par.
5. Supongamos que $\mu(X) < \infty$ y sean $f_n : X \mapsto \mathbb{C}$ funciones medibles acotadas. Probar que si $f_n \rightarrow f$ uniformemente, se tiene

$$\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$$

Mostrar con un ejemplo que la hipótesis $\mu(X) < \infty$ es esencial.
6. Probar que si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ es continua y $f(x) = 0$ a.e. con respecto a la medida de Lebesgue entonces $f(x) = 0 \quad \forall x$.
7. Sea $\{f_n : n = 1, 2, \dots\}$ una sucesión de funciones medibles con $f_n \geq 0$. Usar el teorema de la convergencia monótona para demostrar

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$
8. Calcular los límites, cuando $n \rightarrow \infty$, de :
 - a) $\int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} dx$,
 - b) $\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{-x} dx$,
 - c) $\int_0^n \left(1 - \frac{x}{2n}\right)^n e^x dx$.

9. Se dice que una función medible $f : X \mapsto \mathbb{C}$ está esencialmente acotada si $\exists C < \infty$ tal que $|f(x)| \leq C$ a.e.. Para esta función se puede definir es *supremo esencial* (para ser mas precisos, el supremo esencial de $|f|$) como

$$ess\sup |f| = \inf \{c : |f(x)| \leq c \text{ a.e.}\}$$

que también denotamos por $\|f\|_\infty$. Probar que si $f, f_n, n = 1, 2, \dots$ están acotadas esencialmente, entonces

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n} 0 \iff \exists E \subset X \text{ de medida 0 tal que } f_n \rightarrow f \text{ uniformemente en } E^c.$$

10. Demostrar que si $f_n \rightarrow f$ en medida

$$\left(\text{es decir, } \forall \lambda > 0 \quad \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \lambda\}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right)$$

entonces existe una subsucesión de $\{f_n\}$ que converge a f puntualmente, a.e.

Indicación: Elegir $n_1 < n_2 < \dots < n_l < \dots$ tal que si $E_l = \{x : |f_{n_l} - f| > \frac{1}{2^l}\}$ se tiene $\mu(E_l) < \frac{1}{2^l}$, y probar

$$\left\{ x : \limsup_{l \rightarrow \infty} |f_{n_l}(x) - f(x)| > 0 \right\} \subset \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{j=l}^{\infty} E_j$$

11. Sea $f : X \mapsto \mathbb{R}$ medible y positiva. Probar que μ_f definida por $\mu_f(A) = \int_A f d\mu$ es una medida (positiva) definida sobre la misma σ -álgebra, \mathcal{A} , dominio de μ .

- 12*. Sea $f \in L^1(\mu)$. Probar que $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $\mu(E) < \delta$ se tiene $\int_E |f| d\mu < \epsilon$.

Con la notación del problema 11, esto nos dice que $\mu_{|f|}$ es absolutamente continua con respecto a μ . El recíproco también es cierto, y se conoce como

(Teorema de Radon-Nikodym). Sea ν una medida positiva y finita tal que para todo E medible con $\mu(E) = 0$ se tiene $\nu(E) = 0$. Entonces $\exists h \in L^1(\mu)$, $h \geq 0$ con $\nu = \mu_h$.