HOJA 4: INTEGRACIÓN

Nota *Para comprobar la respuesta correcta, se puede utilizar herramientas de cálculo como* ***`Geogebra`*** *o* ***`Wolfram Alpha`***

1. Calcular las siguientes integrales indefinidas mediante el cambio de variable adecuado:

$$a) \int \frac{1}{x} e^{1+\ln x}\, dx \qquad b) \int x\, e^{x^2}\, dx \qquad c) \int \frac{e^x}{2e^x - 1}\, dx \qquad d) \int \frac{2}{5-3x}\, dx$$

$$e) \int x^2\sqrt{1+x}\, dx \qquad f) \int \frac{x}{1+x^4}\, dx \qquad g) \int \frac{5}{(4x+3)^3}\, dx$$

2. Dada la integral $\int \frac{\cos t \operatorname{sen}^2 t}{1+\operatorname{sen}^3 t} dt$, se pide:
 a) Hacer el cambio de variable $t = s^2$ y escribir la integral indefinida resultante.
 b) Hacer el cambio de variable $\operatorname{sen} t = z$ y escribir la integral indefinida resultante.

3. Calcular las siguientes integrales con la técnica de integración por partes:

$$a) \int x \cos x\, dx \qquad b) \int x\, e^{-x}\, dx \qquad c) \int \ln x\, dx \qquad d) \int x^2 \sin x\, dx \qquad e) \int x \ln x\, dx$$

4. Utilizar el método de la descomposición en fracciones simples (factores lineales) para calcular:

$$a) \int \frac{1}{x^2-5x+6}\, dx \qquad b) \int \frac{x^4+3}{x^2-4x+3}\, dx \qquad c) \int \frac{3x+1}{x^3-x}\, dx$$

5. El teorema fundamental del cálculo integral establece que, si f es una función continua en $[a,b]$, la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es derivable en $[a,b]$ y su derivada es $F'(x) = f(x)$. Usando dicho teorema y la regla de la cadena, calcular la derivada de la siguiente función: $F(x) = \int_0^{x^2} (\operatorname{sen} t^2)\, \log(1+t^2)\, dt\,.$

6. Encontrar una función f definida y continua en $[0,\infty)$ tal que $\int_0^{x^2} (1+t)\, f(t)\, dt = 6\, x^4$.

7. Las siguientes funciones no tienen una primitiva que se pueda expresar en términos de polinomios, exponenciales, logaritmos, funciones trigonométricas, y sus inversas. Utilizar la regla del trapecio (con dos subintervalos) para calcular:

$$a) \int_0^1 e^{-x^2} dx \qquad b) \int_1^3 \sqrt{x^3-1}\, dx$$

Calcular también la primera integral aproximando e^t por su polinomio de Taylor de grado 3 en $t = 0$, y comparar el resultado con el anterior (hay que tener en cuenta que el valor de la integral es $0.746824\ldots$).

8. Aproximar el valor de $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\, dx$ usando la regla del trapecio con 4 subintervalos.

9. Escribir la integral definida que resulta de hacer el cambio de variable indicado en la integral definida dada:

a) Cambio de variable $x = \sqrt{u}$ en la integral $\displaystyle\int_1^2 x^3 e^{x^2}\,dx$.

b) Cambio de variable $u = \ln x$ en la integral $\displaystyle\int_1^e x^3(\ln x)^2\,dx$.

c) Cambio de variable $x = \operatorname{sen} t$ en la integral $\displaystyle\int_{1/2}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

10. Calcular el área delimitada por las curvas siguientes:
(i) $y = \operatorname{sen}\, x$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{2}$ y el eje x.
(ii) $y = 5 - x^2$ e $y = 3 - x$

11. Escribir la integral o integrales definidas que permiten calcular el área de las regiones indicadas:

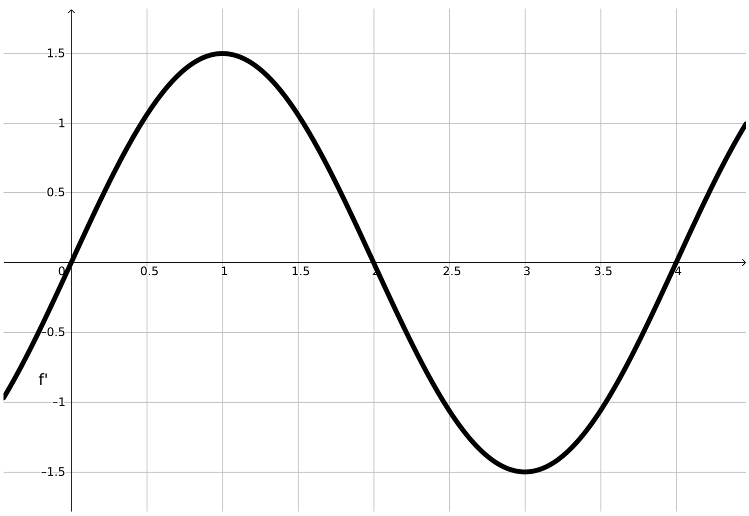
a) La región comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = x + 1$, $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ y las rectas $y = -1$ y $x = 3$.

b) La región comprendida entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 2x$.

c) La región comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$ y su asíntota horizontal.

12. Calcular el área comprendida entre las curvas $y = x\,e^{-x}$, $y = x^2\,e^{-x}$ para valores de $x \geq 1$.

13. Si $f(0) = 1$ y la gráfica de f' viene dada por la imagen de abajo, se pide:



a) ¿Cuánto vale $f(4)$?

b) Calcular aproximadamente $f(2)$ por la regla del trapecio con dos subintervalos.

c) Obtener $f(1)$ y $f(3)$ a partir de $f(2)$ y $f(4)$.

d) Dibujar la gráfica de f en el intervalo $[0, 4]$ teniendo en cuenta los apartados anteriores y el crecimiento y la convexidad de f.

14. Una fuga en un pozo de petróleo contamina a razón de $20.000e^{-0{,}12t}$ litros por mes. Si la fuga no se arregla nunca, ¿cuál es el total de petróleo que saldrá de la fuga?

15. Tras ingerir una pastilla antibiótica, la concentración de antibiótico en sangre se modela con la función

$$C(t) = 8(e^{-0{,}4t} - e^{-0{,}6t})$$

donde el tiempo t transcurrido tras la ingesta se mide en horas y C se mide en $\mu g/mL$. ¿Cuál es la concentración media del antibiótico durante las dos primeras horas?