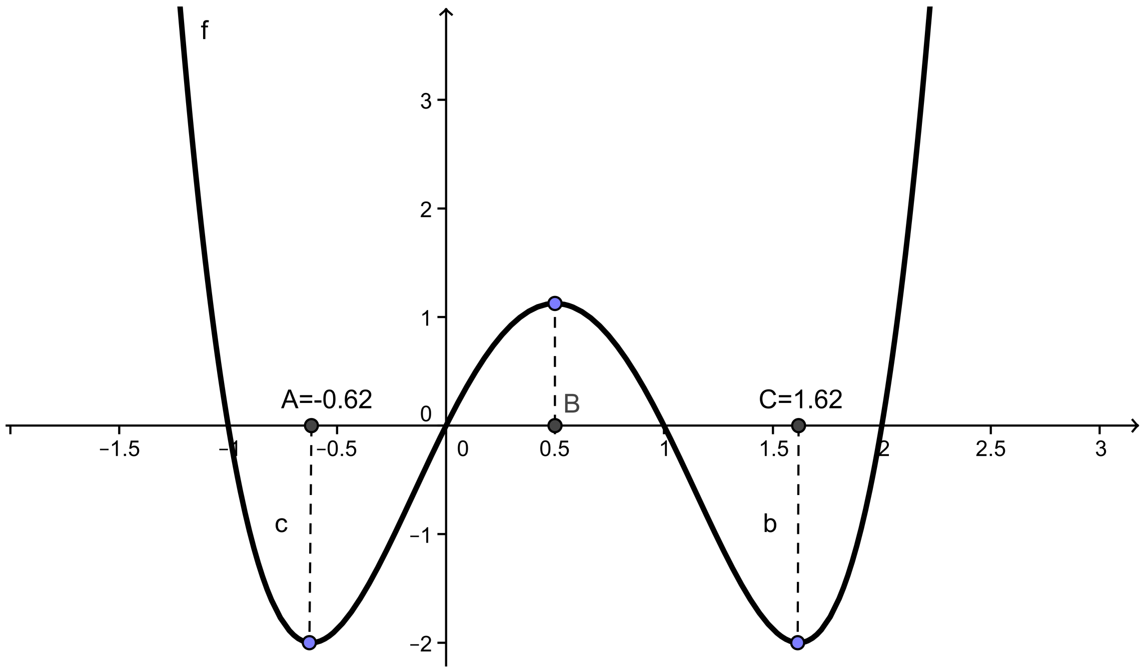
HOJA 2: FUNCIONES, DERIVADAS

1.- Sea $f(x)$ una función cuya gráfica es la siguiente:



a) Determina los intervalos donde la función derivada f' es positiva.
b) Determina los intervalos donde la función derivada f' es creciente.
c) Esboza aproximadamente la gráfica de f'.

2.- Calcula las derivadas de las siguientes funciones en su dominio de definición:

(a) $y = \log \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ (b) $y = \operatorname{sen}(\log x)$ (c) $y = x^x$ (d) $y = x^{\log x}$

3.- Para aplicar a un problema físico la regla de la cadena, supongamos que un observador se encuentra situado a 100 m de un globo que se eleva a una velocidad de 50 m/min. ¿Con qué rapidez crece el ángulo de elevación de la línea de visión del observador cuando el globo está a una altura de 100 m?
Sugerencia. Si llamamos $f(t)$ a la altura del globo en el instante t y el ángulo buscado es $g(t)$, se tiene que $f(t)/100 = \tan\big(g(t)\big)$ (dibuja un triángulo rectángulo para comprobarlo).

4.- Un punto P se mueve sobre la parte de la parábola $x = y^2$ situada en el primer cuadrante, de forma que su coordenada x está aumentando a razón de 5 cm/seg. Calcula la velocidad a la que el punto P se aleja del origen cuando $x = 9$.
Sugerencia. Recuerda que la distacia $d(t)$ al origen de un punto que está en las coordenadas $\big(x(t)\,,\,y(t)\big)$ en el instante t es precisamente $\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}$.

5.- Determina el valor de los parámetros a y b para que las funciones que se definen a continuación sean derivables en todo su dominio:

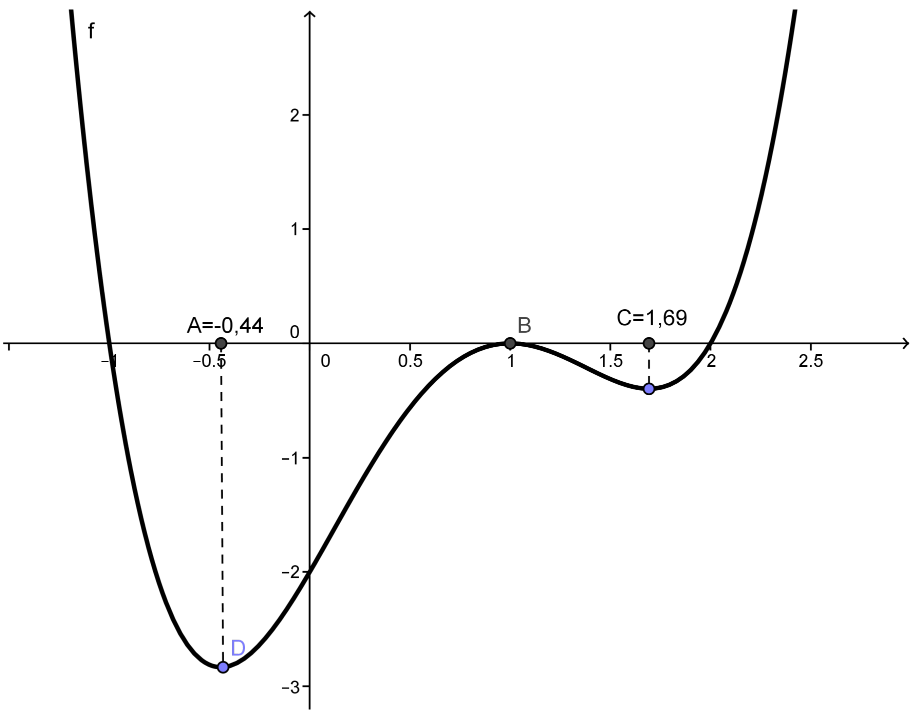
$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq 2, \\ a \cdot x + b & \text{si} \quad x > 2. \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} a + b \cdot x^2 & \text{si} \quad |x| \leq 2, \\ \dfrac{1}{|x|} & \text{si} \quad |x| > 2. \end{cases}$$

6.- Dibuja, de forma clara, una función derivable que tenga mínimos locales en los puntos $x = -1$ y $x = 1$, y además un máximo local en $x = 0$. Si la función dibujada fuera un polinomio ¿cual debería ser como mínimo su grado y por qué?

7.- Dibuja aproximadamente la gráfica de una función $f(x)$, de la que conocemos los siguientes datos:

- El dominio de f es $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.
- $f'(x) > 0$ en $(-\infty, -1) \cup (1, 3) \cup (4, 6)$.
- $f'(x) < 0$ en $(-1, 1) \cup (3, 4) \cup (6, \infty)$.
- $f''(x) > 0$ en $(-\infty, -2) \cup (0, 3) \cup (3, 5) \cup (7, \infty)$.
- $f''(x) < 0$ en $(-2, 0) \cup (5, 7)$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0\,, \quad \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty.$
- $f(0) = f(2) = f(4) = 0, \quad f(-1) = f(6) = 1, \quad f(1) = -1.$

8.- De una función $f(x)$ solamente conocemos la gráfica de su derivada $f'(x)$, que tiene el aspecto siguiente:



a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.
b) Determina los intervalos de concavidad y convexidad de la función $f(x)$.
c) Esboza aproximadamente la gráfica de f.

9.- Calcula el valor máximo y mínimo de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ en el intervalo $[-2, 6]$.

10.- Demuestra que la ecuación $6x^5 + 13x + 1 = 0$ tiene exactamente una raíz real.

11.- Estudia y representa las gráficas de las siguientes funciones en el conjunto de puntos donde estén definidas.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 2}$ (b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ (c) $f(x) = e^{-x^2}$

(d) $f(x) = \operatorname{senh} x \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (e) $f(x) = \cosh x \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

12.- Estudia la concavidad de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \log|x|$ en su dominio de definición.

13.- Prueba que la función $f(x) = \log \dfrac{1+x}{1-x}$ es creciente en todo su dominio de definición.

14.- Considera la función $f(x) = e^{-1/x^2}$, $f(0) = 0$.
(a) Prueba que $f(x)$ tiene un mínimo local en $x = 0$.
(b) Prueba que f tiene como asíntota horizontal la recta $y = 1$.
(c) Halla los valores máximo y mínimo de $f(x)$ en el intervalo $[-1, 1]$.

15.- Sea $N(t)$ el tamaño de una población y supongamos que la velocidad de crecimiento per cápita es del 3%. Se sabe que el tamaño de la población en $t = 4$ es 100 (en miles de individuos). Utiliza una aproximación lineal para calcular el tamaño de la población en el instante $t = 4,1$.

16.- Halla el polinomio de Taylor de grado 3 de las siguientes funciones en el punto que se indica:

(a) $f(x) = \cos x$ en $a = \dfrac{\pi}{4}$ (b) $f(x) = \log x$ en $a = 1$ (c) $f(x) = x^{1/2}$ en $a = 1$

17.- Calcula el polinomio de Taylor de grado 4 en $a = 0$ para la función $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. ¿Qué sucede si lo utilizamos para calcular el valor aproximado de $f(2)$?

18.- Halla el polinomio de Taylor de grado 4 para aproximar la función

$$y = f(t) = \log(1+t),$$

alrededor de $t = 0$. Compara el valor de tu calculadora y el aproximado para $t = 1$.

19.- ¿Qué grado del polinomio de Taylor de $y = f(t) = \log(1+t)$ en $a = 0$ permite estimar $\log(1,1)$ con un error inferior a 10^{-3}?