Matemáticas — Curso 2024-2025
Primero de Biología

# Hoja 1: Funciones, gráficas, límites, continuidad

*Notación:* $\ln x$ denota el logaritmo neperiano de $x$. La parte entera de $x$ (es decir, el mayor entero $n \le x$) se denota mediante $[x] = n$.

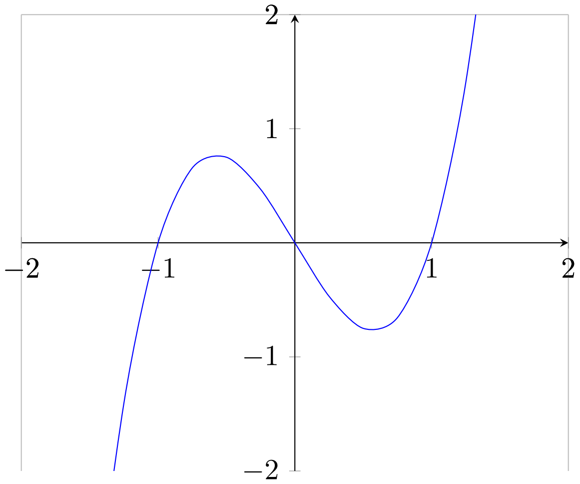
**1.-** ¿ Cuál es el mayor dominio posible de las siguientes funciones?

$$(a) \quad f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}, \qquad (b) \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 1},$$

$$(c^*) \quad f(x) = \frac{1}{x - \sqrt{1 - x^2}}, \qquad (d) \quad f(x) = \frac{1}{1 - \ln x},$$

$$(e^*) \quad f(x) = \frac{\sqrt{5 - x}}{\ln x}, \qquad (f) \quad f(x) = \ln(x - x^2).$$

**2.-** Sea $f(x)$ una función cuya gráfica es la siguiente:




a) Dibuja la gráfica de $g(x) = f(x + 0'5)$.
b) Dibuja la gráfica de $h(x) = f(x - 2)$.
c) Dibuja la gráfica de $j(x) = f(x) + 0'3$.
d) Dibuja la gráfica de $k(x) = f(x) - 1$.
e) Dibuja la gráfica de $l(x) = f(2x)$.
f) Dibuja la gráfica de $m(x) = f(x/2)$.
g) Dibuja la gráfica de $n(x) = f(|x|)$.
h) Dibuja a gráfica de $p(x) = |f(x)|$.

**3.-** En un ciclo respiratorio normal de un hombre de tamaño medio, el volumen de aire que entra y sale de los pulmones es aproximadamente 500 mL. Los volúmenes de aire de reserva y residual que permanecen en los pulmones son 2000 mL. Un ciclo respiratorio para este hombre medio dura 4 segundos.

Utilizando estos datos, ¿ cuál sería un posible modelo para el volumen total $V(t)$ de aire en los pulmones en función del tiempo?

**4.-** Para cada una de las siguientes funciones dí, razonadamente, si es par o impar. Determina también si es periódica o no, indicando en su caso el valor del periodo.

$$\text{(a)} \quad f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}, \qquad \text{(b)} \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \qquad \text{(c)} \quad f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x},$$

$$\text{(d)} \quad f(x) = \exp^{-x^2} \cos x, \qquad \text{(e)} \quad f(x) = \operatorname{sen} x, \qquad \text{(f)} \quad f(x) = \operatorname{sen}^2(x)$$

**5.-** Si $f$ y $g$ son dos funciones impares, ¿cómo son $f + g$, $f \cdot g$ y $f \circ g$? ¿Y si $f$ es par y $g$ impar?

**6.-** Si se invierten $x$ Euros en un depósito con un interés compuesto anual del 4%, entonces la cantidad de dinero $D(x)$ que habrá en el depósito tras un año es $D(x) = (1,04)x$.

Hallar expresiones para $D \circ D$, $D \circ D \circ D$ y $D \circ D \circ D \circ D$. ¿Qué representan estas composiciones? ¿Hay una fórmula para la composición de $D$ consigo misma $n$ veces?

**7.-** Consideramos las funciones:

$$f(x) = \cos x\,, \quad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [-1,1] \\ x, & \text{si } x \notin [-1,1]. \end{cases}$$

Calcula las compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$.

**8.-** Sean $f(x) = m_1 x + b_1$ y $g(x) = m_2 x + b_2$ dos funciones lineales. Comprueba que $f \circ g$ y $g \circ f$ son también lineales ¿Son iguales? ¿Qué pendiente tienen sus gráficas?

**9.-** Al inflar de aire un globo, que tomaremos como esférico, se estima que el radio aumenta a una velocidad de 2 cm/s.

a) Expresar el radio $r$ del globo en función del tiempo $t$.

b) Si $V$ es el volumen del globo en función del radio, ¿qué es $V \circ r$?

**10.-** ¿Cuáles de las siguientes funciones son inyectivas? ¿Cuál es la inversa de las que son inyectivas? Para las que no, ¿qué par de puntos dan la misma imagen?

$(a)$ $f(x) = 7x - 4$, $\qquad$ $(b)$ $f(x) = \operatorname{sen}(7x - 4)$,

$(c^*)$ $f(x) = (x+1)^3 + 2$, $\qquad$ $(d^*)$ $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$,

$(e^*)$ $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $\qquad$ $(f^*)$ $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$,

$(g)$ $f(x) = e{-}x$, $\qquad$ $(h)$ $f(x) = \ln(x+1)$.

**11.-** Esbozar, con los mínimos cálculos posibles, la gráfica de las siguientes funciones:

$(a)$ $f(x) = (x+2)^2 - 1$, $\qquad$ $(b)$ $f(x) = \sqrt{4-x}$,

$(c)$ $f(x) = \min\{x, x^2\}$, $\qquad$ $(d^*)$ $f(x) = x^2 + 1/x$,

$(e^*)$ $f(x) = 1 - e^{-x}$, $\qquad$ $(f)$ $f(x) = |e^x - 1|$,

$(g^*)$ $f(x) = |x^2 - 1|$, $\qquad$ $(h^*)$ $f(x) = [x]$

**12.-** Calcula los siguientes límites, simplificando los factores comunes que puedan aparecer:

$(a)$ $\displaystyle\lim_{x\to-2} \frac{x^3+8}{x^2-4}$, $\qquad$ $(b^*)$ $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{3-\sqrt{x^2+8}}$,

$(c)$ $\displaystyle\lim_{x\to2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$, $\qquad$ $(d^*)$ $\displaystyle\lim_{x\to-1} \left(\frac{3}{x+1} - \frac{12}{x^2+6x+5}\right)$,

$(e)$ $\displaystyle\lim_{x\to1} \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1}\right)$, $\qquad$ $(f^*)$ $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$.

**13.-** Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \dfrac{x^3-8}{x^2-4}$, (b) $f(x) = x - [x]$,

(c) $f(x) = x^3 \tan(3x+2)$, (d) $f(x) = \sqrt{x^2-5x+6}$,

(e) $f(x) = (\ln(x-2))^3$, (f) $f(x) = (x-5)\ln(8x-3)$,

(i) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \in [a-1, a), \\ x + a & \text{si} \quad x \in [a, a+1]. \end{cases}$ (j) $f(x) = \begin{cases} -|\operatorname{sen} x| - 4 & \text{si} \quad x < \pi, \\ |\cos x| - 5 & \text{si} \quad x \geq \pi. \end{cases}$

**14.-** Estudiar si hay algún valor de $k$ para el que la siguiente función sea continua en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} + 2 & \text{si} \quad x \neq 0, \\ k & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

**15.-** Discutir la existencia de los límites siguientes y calcular su valor si es posible:

$(a)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4x-7}{7x^2-\sqrt{2x^6+x^5}}$, $(b^*)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(3x^2-1)^2(x+7)^3}{x^7+6}$,

$(c)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+5}}{x^2-7}$, $(d)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$,

$(e)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x-1}$, $(f)$ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x-1}$,

$(g^*)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} e^{1/x}$, $(h^*)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} e^{1/x}$,

$(i^*)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$, $(j)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1-e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$,

$(k^*)$ $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{x}{x^2-4}$, $(l^*)$ $\lim_{x\to 1} \dfrac{|x-1|}{x-1}$