

Hoja 7: Dinámica de poblaciones

1. Las hembras de una población se pueden clasificar en dos grupos de edad (hembras jóvenes y hembras adultas). La matriz de Leslie que describe la evolución de esta población es la siguiente:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0,11 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) ¿Cuál es la proporción de hembras jóvenes que consiguen llegar al estado adulto?
¿Cuál es la natalidad en cada uno de los grupos de edad?
- (b) Si inicialmente hay 100 hembras de cada clase, ¿cuántas habrá en el siguiente período de tiempo?
- (c) A largo plazo, ¿cuál será la tasa de variación de cada uno de los grupos? ¿Se extinguirá la población?
- (d) A largo plazo, ¿cuál será la proporción de hembras jóvenes y adultas?
2. En cierta especie animal, las hembras se clasifican en *juveniles* (hasta 1 año de edad) y *adultas* (de 1 a 2 años de edad).
- Solamente el 40% de las hembras jóvenes sobreviven cada año y pasan a adultas. Tienen una descendencia de 1,1 hembras al año.
- Las hembras adultas no sobreviven al año siguiente, y tienen una descendencia media de 1,6 hembras cada año.
- (a) Construir la matriz de Leslie correspondiente a este modelo de evolución.
- (b) Calcular la tasa de crecimiento o decrecimiento a largo plazo.
- (c) Calcular la proporción aproximada de hembras jóvenes que formarán parte de la población a largo plazo.
3. La población de cierta especie de animales en un bosque está dividida en dos grupos de edad (jóvenes y adultos). La correspondiente matriz de Leslie es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Interpreta el significado de cada uno de los elementos de la matriz anterior.
- b) Calcula el autovalor dominante de A y un autovector asociado.
- c) Sea $X(k)$ el número de animales de cada grupo en la etapa k . Si en la etapa 0 hay únicamente 10 animales jóvenes en el bosque, calcula $X(1), X(2), X(3)$ y $X(4)$. A partir de $X(4)$ calcula la proporción exacta de individuos de cada grupo respecto al total de la población en la etapa 4.
- d) Calcula la misma proporción de forma aproximada mediante el autovector asociado al autovalor dominante, y compara el resultado obtenido en este apartado con el del apartado anterior.

4. Estudiamos una población de aves. Clasificamos las hembras en tres grupos de edad: jóvenes (de 0 a 1 año), adultas fértiles (de 1 a 2 años), y adultas no fértiles (de 2 a 3 años). Sabemos que un 12% de las hembras jóvenes y un 54% de las adultas fértiles sobreviven cada año. Ninguna de las adultas no fértiles sobrevive. Cada hembra joven produce (en promedio) una hembra al año y cada adulta fértile produce dos.
- a) Describir la evolución de la población en forma matricial.
 - b) Transcurridos unos años, determina en qué tanto por ciento crecerá o decrecerá anualmente la población de hembras.
 - c) Determina cuál debería ser el tanto por ciento de supervivencia de las hembras jóvenes para que la población se mantuviera estable.
5. Una población de aves se encuentra repartida entre dos humedales A y B . Se sabe que cada día un 70% de aves del humedal A se traslada a B mientras que un 50% de aves de B lo hace a A .
- a) Dibuja el diagrama de estados y escríbelo después en forma matricial.
 - b) Si inicialmente había el mismo número de aves en cada humedal, ¿que porcentaje de éstas están en cada uno de ellos después de dos días?
 - c) Si inicialmente había 120 aves en cada humedal ¿qué evolución seguirá el sistema a largo plazo?
6. Supongamos que
- $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$$
- es la matriz de transición de una población de cotorras, dividida para su estudio en jóvenes y adultas.
- a) Demuestra que, a la larga, la población crecerá por un factor aproximado de 1.27.
 - b) Los granjeros y otras personas del área no quieren que la población crezca. Pueden controlarla permitiendo la caza de cotorras adultas. Si h es la proporción de adultas cazadas en cada período, ¿cuál será ahora la matriz de transición? (Observación: La proporción h se considera sobre el total de adultas al final del período, una vez que ya se ha tenido en cuenta la natalidad y la mortalidad debida a otras causas distintas a la caza)
 - c) Prueba que $h = 0.6$ es una caza demasiado intensiva, es decir, la población de cotorras se extinguiría.
 - d) Es posible seleccionar h de manera que la población no crezca ni desaparezca. ¿Cuál sería ese valor de h ?
 - e) Responder a las preguntas anteriores cambiando la matriz A por

$$A' = \begin{pmatrix} 0.8 & 1 \\ 0.6 & 0 \end{pmatrix}$$

7. La evolución de una población viene descrita por la matriz de transición:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1,4 & 0,5 \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Tras introducir los datos en un programa de ordenador, hemos obtenido la salida siguiente:

| n | X_n | Y_n | Z_n | $S_n = X_n + Y_n + Z_n$ | X_n/X_{n-1} | X_n/S_n | Y_n/S_n | Z_n/S_n |
|---|--------|--------|--------|-------------------------|---------------|-----------|-----------|-----------|
| 0 | 11 | 22 | 5 | 38 | | 0,289 | 0,579 | 0,132 |
| 1 | 33,3 | 6,6 | 17,5 | 57,4 | 3,027 | 0,580 | 0,115 | 0,305 |
| 2 | 17,99 | 19,98 | 8,45 | 46,42 | 0,540 | 0,388 | 0,430 | 0,182 |
| 3 | ?? | ?? | ?? | | | | | |
| 4 | 23,449 | 19,318 | 11,431 | 54,198 | 0,728 | 0,433 | 0,356 | 0,211 |
| 5 | 32,761 | 14,069 | 16,775 | 63,605 | 1,397 | 0,515 | 0,221 | 0,264 |
| 6 | 28,085 | 19,656 | 13,907 | 61,648 | 0,857 | 0,456 | 0,319 | 0,226 |

(Los datos correspondientes a las celdas que ocuparían estas posiciones intermedias no son relevantes para la resolución del problema, por lo que los suprimimos para ahorrar espacio.)

| n | X_n | Y_n | Z_n | $S_n = X_n + Y_n + Z_n$ | X_n/X_{n-1} | X_n/S_n | Y_n/S_n | Z_n/S_n |
|----|---------|--------|--------|-------------------------|---------------|--------------|--------------|--------------|
| 25 | 79,128 | 45,143 | 39,821 | 164,093 | 1,052 | 0,482 | 0,275 | 0,243 |
| 26 | 83,111 | 47,477 | 41,822 | 172,410 | 1,050 | 0,482 | 0,275 | 0,243 |
| 27 | 87,379 | 49,867 | 43,972 | 181,218 | 1,051 | 0,482 | 0,275 | 0,243 |
| 28 | 91,800 | 52,427 | 46,195 | 190,421 | 1,051 | 0,482 | 0,275 | 0,243 |
| 29 | 96,495 | 55,080 | 48,559 | 200,134 | 1,051 | 0,482 | 0,275 | 0,243 |
| 30 | 101,391 | 57,897 | 51,022 | 210,310 | 1,051 | 0,482 | 0,275 | 0,243 |

- Explicar el significado biológico de los nueve números que aparecen en la matriz de transición.
- Calcular los números que deberían aparecer en las **tres celdas** marcadas con interro-gaciones en la fila 3.
- Explicar el significado biológico de los **cuatro números marcados en negrita en la última fila** (y que se repiten en las tres filas anteriores)