Hoja 6: Matrices y cálculo matricial

1. Realizar las siguientes multiplicaciones de matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \\ 0 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. Sea A la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Realiza la siguientes multiplicaciones de matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}A; \qquad A\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}A; \qquad A\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales usando el método de Gauss:

$$(a)\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$(c)\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \qquad (d)\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 1 \end{cases}$$

4. Calcula la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tal que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Hallar la matriz inversa de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

6. Calcula el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

7. Calcula el determinante de la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

8. Halla la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

9. Usando el método de Gauss, halla la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

10. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales usando el método de Gauss:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ -x + y + 2z = 0 \\ y + 3z = -1 \end{cases}$$

11. Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, calcula las sucesivas potencias de A.

12. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, ¿ Podrás hallar una matriz X tal que $A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$?

13. Halla la potencia n de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ haciendo los casos $n = 1, 2, 3$ y conjeturando el resultado.

14. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Halla los autovalores λ_1 y λ_2 de esta matriz. Comprueba que si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ y P es la matriz cuyos vectores columna son autovectores de λ_1 y λ_2, entonces $PDP^{-1} = A$. Da una expresión para A^n.

15. Halla los autovalores de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Hallar tres autovectores de A que sean linealmente independientes.