DINÁMICA DE POBLACIONES

Eugenio Hernández

MATEMÁTICAS // GRADO EN BIOLOGÍA

Ejemplos de sistemas de evolución discretos

EJEMPLO 1. (MODELO DE P. LESLIE, 1945)

Para estudiar la evolución de una población de pájaros los dividimos en dos grupos de edad: jóvenes y adultos. Los jóvenes no se reproducen y el 30 % de ellos sobrevive y llegan a la primavera siguiente convertidos en adultos. Cada adulto produce una media de 2 jóvenes por año y el número de adultos que sobrevive cada año es el 40 %. Inicialmente hay 1000 adultos y ningún joven.

a) Escribe el modelo matricial de la dinámica de esta población.

b) ¿Cuántos pájaros habrá en cada grupo de edad en el tercer año?

Formulación matemática : sean J_n y A_n el número de jóvenes y adultos, respectivamente, al final del año n. Tenemos $J_0 = 0$ y $A_0 = 1000$, y además,

$$\left\{ \begin{array}{l} J_n = 2A_{n-1} \\ A_n = 0,3J_{n-1} + 0,4A_{n-1} \end{array} \right\}.$$

Este sistema puede escribir usando matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} J_n \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{n-1} \\ A_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \end{pmatrix}.$$

OBJETIVO 1.

Calcular la **tasa de variación de cada grupo en el año n**, es decir $\frac{J_n}{J_{n-1}}$ y $\frac{A_n}{A_{n-1}}$ y la **tasa de variación de cada grupo con el paso del tiempo**, es decir $\lim_{n\to\infty}\frac{J_n}{J_{n-1}}$ y $\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{A_{n-1}}$.

OBJETIVO 2.

Calcular **la distribución de cada grupo en el año n**, es decir $\frac{J_n}{J_n+A_n}$ y $\frac{A_n}{J_n+A_n}$, y **la distribución de cada grupo con el paso del tiempo**, es decir $\lim_{n\to\infty}\frac{J_n}{J_n+A_n}$ y $\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{J_n+A_n}$.

EJEMPLO 2. (MODELO DE A. MARKOV, 1906)

Dos paises A y B comparten la misma moneda. Inicialmente A tiene el 60 % de la monedas y B tiene el 40 %. Cada año el 80 % de las monedas que hay en un país se queda en el mismo y el 20 % pasa al otro país.

a) Escribe la formulación matemática de este sistema evolutivo.

b) Halla la tasa de variación del porcentaje de monedas en cada pais al cuarto año. ¿Cuál crees que puede ser la tasa de variación del porcentaje de monedas en cada pais a lo largo del tiempo?

c) ¿Qué porcentaje de monedas crees que habrá en cada país a lo largo del tiempo?

Sean x_n e y_n el el porcentaje de monedas en A y en B, respectivamente, al finalizar el año n. Tenemos $x_0 = 60$ e $y_0 = 40$, y además,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = 0,8x_{n-1} + 0,2y_{n-1} \\ y_n = 0,2x_{n-1} + 0,8y_{n-1} \end{array} \right\}.$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Este es el modelo matemático. La respuesta a las preguntas se obtiene, por ahora, con un programa de ordenador y una hoja de cálculo.

Significado de los autovalores y autovectores en los sistemas dinámicos discretos.

TASA DE VARIACIÓN DE CADA GRUPO.

Sea $\vec{X_n} = A\overrightarrow{X_{n-1}}$ un sistema de evolución con k grupos. la **tasa de variación** de cada grupo con el paso del tiempo es el autovalor dominante λ_1 de A (es decir, λ_1 es mayor que el resto de los autovalores en valor absoluto).

NOTA: La tasa de variación λ debe ser un número positivo cuando se estudian sistemas biológicos.
i) Si $\lambda > 1$ la población crece indefinidamente.
ii) Si $\lambda = 1$ la población tiende a un valor fijo con el paso del tiempo.
ii) Si $\lambda < 1$ la población tiende a extinguirse.

Ejercicio 1. La matriz de Fibonacci es $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Cuál es la tasa de variación del número de los conejos de Fibonacci con el paso del tiempo?

Distribución de la población en cada grupo.

Sea $\vec{X_n} = A\overrightarrow{X_{n-1}}$ un sistema de evolución con k grupos. Si λ_1 es un autovalor dominante de la matriz A con autovector

$$\vec{u_1} = (u_1, u_2, \ldots, u_k)^t$$

el porcentaje de individuos en el grupo j con el paso del tiempo es

$$\frac{u_j}{u_1 + \cdots + u_k} \times 100\,\%\,, \quad j = 1, 2, \ldots, k\,.$$

Ejercicio 2. (Ejercicio 1 de la hoja 7). Las hembras de una población se pueden clasificar en dos grupos de edad (hembras jóvenes y hembras adultas). La matriz de Leslie que describe la evolución de esta población es la siguiente:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0,11 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) ¿Cuál es la proporción de hembras jóvenes que consiguen llegar al estado adulto? ¿Cuál es la natalidad en cada uno de los grupos de edad?

(b) Si inicialmente hay 100 hembras de cada clase, ¿cuántas habrá en el siguiente período de tiempo?

(c) A largo plazo, ¿cuál será la tasa de variación de cada uno de los grupos? ¿Se extinguirá la población?

(d) A largo plazo, ¿cuál será la proporción de hembras jóvenes y adultas?

Ejercicio 3. Una población de individuos está distribuida en dos grupos de edad, jóvenes y adultos. Cada año un individuo joven produce, en promedio, 1,5 nuevos jóvenes, y un individuo adulto produce, en promedio, 2 nuevos jóvenes. Por otro lado, solo el 8 % de los jóvenes sobrevive y pasa a ser adulto, mientras que todos los individuos adultos han muerto al finalizar el segundo año. Inicialmente hay 100 jóvenes y 100 adultos.

(a) Escribe el modelo matricial de la dinámica de esta población.

(b) ¿Cuántos pájaros hay en cada grupo después de tres años?

(c) ¿Cuál es la tasa de variación de cada grupo de edad con el paso del tiempo?

(d) ¿Cómo se distribuye la población con el paso del tiempo?

Ejercicio 4. Una colonia de perdices vive en dos ecosistemas X e Y. Inicialmente hay 1500 perdices en X y 500 en Y. Cada mes el 5 % de las perdices de X migra a Y y a su vez el 5 % de las perdices de Y migra a X.

(a) Escribe las ecuaciones de la evolución del número de perdices en cada ecosistema.

(b) ¿Qué cantidad de perdices habrá en cada ecosistema después de 1 año?

(c) ¿Qué cantidad de perdices habrá en cada ecosistema con el paso del tiempo?

Ejercicio 5. (Ejercicio 6 de la hoja 7). Supongamos que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

es la matriz de transición de una población de cotorras, dividida para su estudio en jóvenes y adultas.

(a) Demuestra que, a la larga, la población crecerá por un factor aproximado de 1.27.

(b) Los granjeros y otras personas del área no quieren que la población crezca. Pueden controlarla permitiendo la caza de cotorras adultas. Si h es la proporción de adultas cazadas en cada período, ¿cuál será ahora la matriz de transición? (Observación: La proporción h se considera sobre el total de adultas al final del periodo, una vez que ya se ha tenido en cuenta la natalidad y la mortalidad debida a otras causas distintas a la caza).

Ejercicio 5. (Ejercicio 6 de la hoja 7 - Continuación).

(c) Prueba que $h = 0{,}6$ es una caza demasiado intensiva, es decir, la población de cotorras se extinguiría.

(d) Es posible seleccionar h de manera que la población no crezca ni desaparezca. ¿Cuál sería ese valor de h?

(e) Responder a las preguntas anteriores cambiando la matriz A por

$$A' = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 1 \\ 0{,}6 & 0 \end{pmatrix}$$