AUTOVALORES Y AUTOVECTORES DE UNA MATRIZ

Eugenio Hernández

MATEMÁTICAS // GRADO EN BIOLOGÍA

Vectores linealmente independientes.

A los vectores de n-componentes los escribiremos en columna:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Vectores linealmente independientes

Un conjunto de k vectores, $\vec{v_1}, \vec{v_2} \ldots \vec{v_k}$, de n-componentes cada uno se dice que son linealmente independientes si el rango de la matriz de orden $n \times k$ que se forma poniendo los vectores por columna es k.

RANGO DE UNA MATRIZ

El rango de una matriz de orden $n \times k$ coincide con el número de peldaños de una de sus matrices escalonadas

Ejercicio 1. Prueba que los vectores

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

son linealmente independientes.

Autovalores y autovectores.

AUTOVALORES DE UNA MATRIZ A

Un número λ es un autovalor de una matriz cuadrada A de orden n si $det(A - \lambda I_n) = 0$.

AUTOVECTORES DE UNA MATRIZ A

Un vector no nulo $\vec{v}$ es un autovector de una matriz A asociado con un autovalor λ si $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. (Es decir, $\vec{v}$ es solución de la ecuación $(A - \lambda I_n)\vec{v} = \vec{0}$.

CÁLCULO DE AUTOVALORES.

Los autovalores de una matriz cuadrada A son las soluciones λ de la ecuación $det(A - \lambda I_n) = 0$.

Ejercicio 2. Hallar los autovalores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3. Hallar los autovalores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, .$$

CÁLCULO DE AUTOVECTORES.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de una matriz cuadrada A de tamaño n, cualquier solución **no nula** de la ecuación $(A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}\,, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, es un autovector de A de autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

la matriz del ejercicio 2.

(a) Halla los autovectores de cada uno de sus autovalores $\lambda_1 = 6$ y $\lambda_2 = -1$.

(b) Halla dos autovectores de esta matriz que sean linealmente independientes.

Ejercicio 5. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 \\ 0,7 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcula los autovalores de la matriz A.

(b) Halla dos autovectores de la matriz A que sean linealmente independientes.

Ejercicio 6. Halla tres autovectores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},.$$

que sean linealmente independientes.

Cálculo rápido de A^n.

Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ autovalores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Sean

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

un par de autovectores de A con autovalores λ_1 y λ_2 respectivamente, que sean linealmente independientes.
La matriz

$$P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix},$$

formada por los autovectores de A puestos en columna tiene determinante distinto de cero.

Cálculo rápido de A^n.

Diagonalizacion de la matriz A

$$A = PDP^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Vale para matrices cuadradas de cualquier orden

Como

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$A^n = (PDP^{-1})^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1}) = PD^nP^{-1}$$

Cálculo rápido de A^n

$$A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

Ejercicio 7 (Ejercicio 14 de la hoja 6). Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcula los autovalores λ_1 y λ_2 de la matriz A.

(b) Halla dos autovectores de la matriz A que sean linealmente independientes.

(c) Calcula A^{20}.