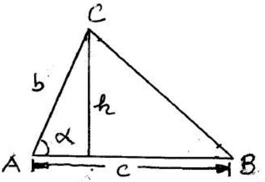
4. Geometría // 4.4. Áreas y volúmenes.

Eugenio Hernández

COMPLEMENTOS PARA LA FORMACIÓN DISCIPLINAR EN MATEMÁTICAS.

4.4.1. Áreas de polígonos.

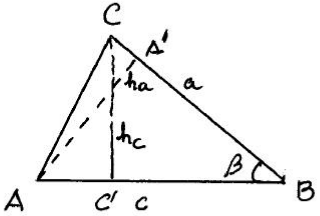


El área de un triángulo es

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}cb\sin\alpha$$

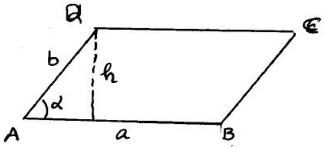
Si el triángulo es equilátero y llamamos ℓ a la longitud de cada uno de sus lados, su área es $\frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$.

Ejercicio 1. Demostrar que el área de un triángulo es independiende de la base y la altura elegidas. (Indicación: Usar el teorema de Thales para probar que $\frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}ah_a$ en el triángulo de la figura)



El área de un paralelogramo es

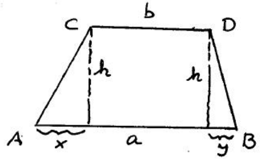
$$\text{Área}(ABCD) = ah = ab\sin\alpha$$



Si el paralelogramo es un cuadrado y llamamos ℓ a la longitud de cada uno de sus lados, su área es ℓ^2 . El área de un cuadrilátero cualquiera se puede calcular por triangulación.

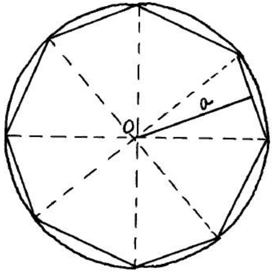
Ejercicio 2. Demostrar que el área de un trapecio cuyas longitudes de los lados paralelos son a y b y su altura h es

$$\text{Área}(ABCD) = \frac{a+b}{2}h\,.$$



Si un polígono es regular, de n lados, lo más fácil es descomponerlo en triángulos con vértice común en el centro del poligono. Si ℓ es la longitud del lado, demostrar que su área es:

$$\text{Área} = \frac{n\ell^2}{4\tan(\pi/n)}\,.$$



Ejercicio 3. Demostrar que el área de un pentágono regular cuyo lado tiene longitud ℓ es

$$\frac{5(1+\sqrt{5})}{4\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\,\ell^2\,.$$

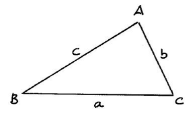
Ejercicio 4. Demostrar que el área de un hexágono regular cuyo lado tiene longitud ℓ es

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}\,\ell^2\,.$$

Fórmula de Herón

Si $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ es el semiperímetro de un triángulo cuyos lados miden a, b y c, se tiene

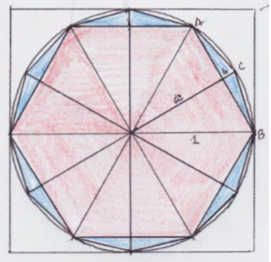
$$\text{Área}(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,.$$



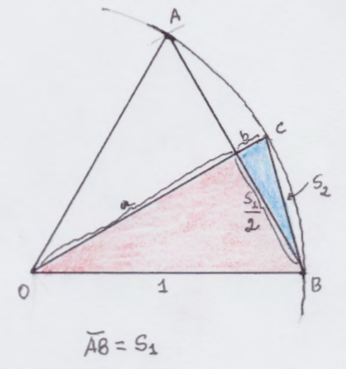
4.4.2. Área de un círculo.

En el área de un círculo aparece el número π. El número π es el cociente entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro.
Comparando los perímetros del hexágono regular inscrito y del cuadrado circunscrito a una circunferencia de radio 1 con su perímetro se obtiene la estimación:

$$3 = \frac{6}{2} < \pi = \frac{\text{perímetro}}{\text{diámetro}} < \frac{8}{2} = 4.$$



Método de Arquímedes para calcular π.



Inscribe un dodecágono regular en una circunferencia dividiendo en dos partes iguales los lados de un hexágono regular. Se tienen las fórmulas:

$$a = \sqrt{1 - \left(\frac{s_1}{2}\right)^2}, \qquad b = 1 - a,$$

$$s_2 = \sqrt{b^2 + \left(\frac{s_1}{2}\right)^2}.$$

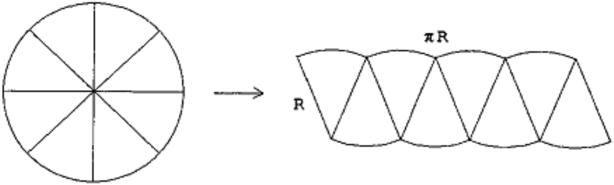
Este conjunto de fórmulas permite calcular el valor s_2 del lado del dodecágono regular usando $s_1 = 1$.

El lado del polígono regular de 24 lados inscrito en la circunferencia se obtiene con la misma fórmula sustituyendo el valor de s_1 por el valor obtenido de s_2.

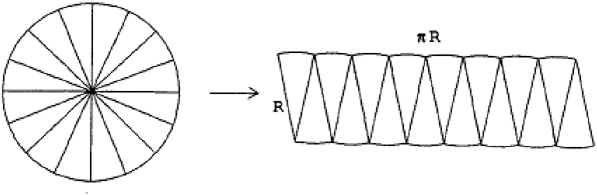
Con estas formulas se puede aproximar el valor de π usando una hoja de cálculo.

Área de un círculo de radio R.

Divide el círculo en ocho partes iguales y reordénalas como se muestra en la figura siguiente:



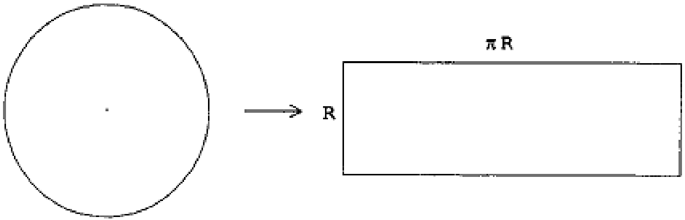
Repite el proceso dividiendo el círculo en 16 pedazos. Se obtiene:



Gráficos tomados de H. Massmann, *Arquímedes: el área y el volumen de una esfera*, Revista del Profesor de Matemáticas.

Área de un círculo de radio R.

Repite el proceso indefinidamente. Al final se obtiene un rectángulo de base πR y de altura R.



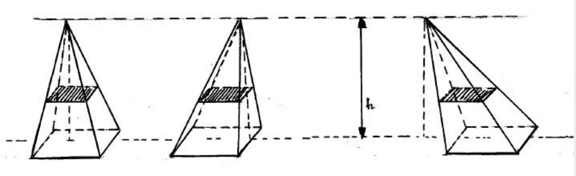
El área de este rectángulo, πR^2, coincide con el área del cículo de radio R.

Ejercicio 5. Calcula el área de un círculo de radio R usando integración.

4.4.3. Volúmenes.

Principio de Cavalieri

Dos sólidos que tienen secciones con la misma área al cortarlos por planos paralelos tienen igual volumen,



y este volumen se calcula haciendo las *sumas infinitas* de las áreas de todas las secciones:

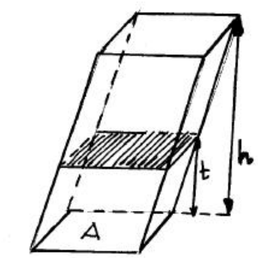
$$V = \int_0^h A(t)\, dt\,,$$

donde $A(t)$ es el área de la seccion a altura t.

Para un prisma con área de la base A, todas las secciones tienen la misma área, $A(t) = A$, y por tanto,

$$V = \int_0^h A\,dt = Ah\,.$$

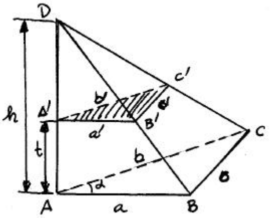
Es decir, el volumen de un prisma se calcula multiplicando el área de su base por la altura.



Volumen de una pirámide de base triangular

$$V = \frac{1}{3}(\text{Área de la base}) \times (\text{altura})$$

D/.

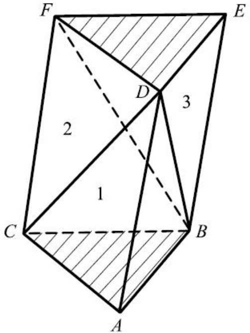


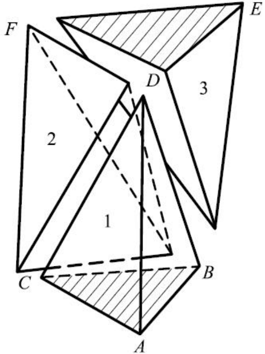
Con referencia a la figura, mostrar que el área $A(t)$ del triángulo $A'B'C'$ es

$$A(t) = A\frac{(h-t)^2}{h^2},$$

donde A es el área de la base, y a continuación calcular la integral.

D/.





Las pirámides 1 y 3 tienen igual volumen porque tienen igual base y altura. Las pirámides 2 y 3 también tienen igual volumen porque pueden interpretarse con vértice común en D y con bases los triángulos coplanarios iguales CFB y FBE. Luego las tres pirámides tienen igual volumen.

NOTA: La fórmula anterior es válida para una pirámide de base poligonal cualquiera. Basta dividir la base en triángulos y aplicar el resultado para cada una de las pirámides que se forman en su interior con base triangular.

Ejercicio 6. Demostrar que el volumen de un tetraedro regular cuyo lado tiene longitud ℓ es

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}\ell^3 \, .$$

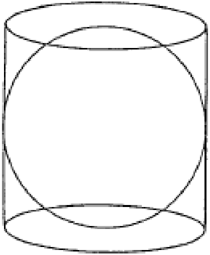
Ejercicio 7. Demostrar que el volumen de un octaedro regular cuyo lado tiene longitud ℓ es

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3}\ell^3 \, .$$

4.4.4. Volumen de una esfera de radio R.

Ejercicio 8. Usando el principio de Cavalieri, demuestra que el volumen de un cono cuya base tiene radio R es $\frac{1}{3}\pi R^2 h$, donde h es la altura del cono.

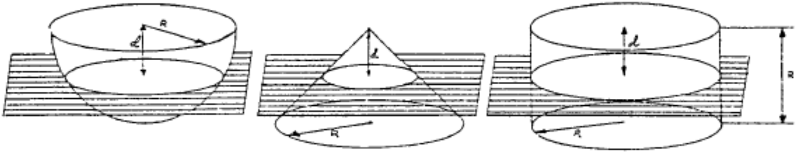
El cálculo del volumen de la esfera fue uno de los descubrimientos que Arquímedes más estimaba de todos los muchísimos que hizo en su vida. Llegó a demostrar de un modo muy original que el volumen de la esfera es igual a dos tercios del volumen del cilindro circular circunscrito a ella.



Tomado de la página Web de Miguel de Guzmán que se conserva en la UCM:

http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/old/08sabormat/experimentgeometria/lamejor.htm

Arquímedes imaginó una semiesfera y junto a ella un cilindro circular recto y un cono recto, ambos de base igual a un círculo máximo de la semiesfera. Algo así:



Arquímedes cortó las tres figuras por un plano paralelo a la base del cilindro y cono y se preguntó cómo serían las secciones determinadas por este plano en cilindro, semiesfera y cono.

ARQUÍMEDES CONCLUYÓ:

Sección cilindro = Sección semiesfera + Sección cono

Usando el principio de Cavalieri (esto no lo sabía Arquímedes, pero se imaginó que la suma de las áreas de rebanadas de una figura daba el volumen) se obtiene:

Volumen cilindro = Volumen semiesfera + Volumen cono

Como el volumen del cilindro es πR^3 y el volumen del cono es $\frac{1}{3}\pi R^3$, se tiene que el volumen de la semiesfera es $\frac{2}{3}\pi R^3$. Por tanto:

$$\text{Volumen de la esfera de radio } R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Área de una superficie esférica de radio R.

La esfera puede considerarse como compuesta por un montón de pirámides de vértice el centro de la esfera y base de área muy pequeña S sobre la esfera. Utiliza esta idea para deducir el área de la superficie de una esfera de radio R a partir de su volumen.