5. Análisis matemático // 5.2. Integración.

Eugenio Hernández

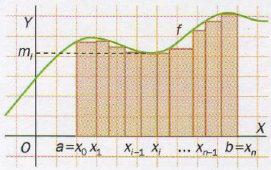
COMPLEMENTOS PARA LA FORMACIÓN DISCIPLINAR EN MATEMÁTICAS

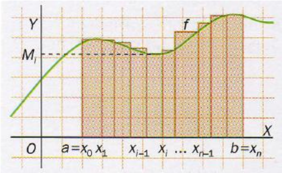
5.2.1. La integral como medida de áreas.

La definición de integral se hace con un procedimiento de aproximación mediante rectángulos.

Dada un función f acotada en un intervalo cerrado $[a, b]$, para una partición $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$, se definen las sumas inferiores y las sumas superiores de Riemann mediante:

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_1 - x_{i-1}) \quad \text{y} \quad S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_1 - x_{i-1})\,.$$





Definición de integral

Se dice que una función acotada es integrable en $[a, b]$ si se cumple que $\sup_{P\in\mathfrak{P}} s(f, P) = \inf_{P\in\mathfrak{P}} S(f, P)$ y este número común se escribe $\int_a^b f(x)dx$.

NOTA: Si f es integrable en $[a, b]$ se tiene que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \,,$$

para cualquiera que sea la elección de $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Teorema del valor medio para integrales

Si f es continua en $[a, b]$, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a) \,.$$

5.2.2. El descubrimiento de Newton y Leibniz: el teorema fundamental del cálculo.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Si f es continua en $[a, b]$, la función integral $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es derivable en (a, b) y su derivada es $F'(x) = f(x)$.

REGLA DE BARROW

Si f es continua en $[a, b]$ y $G(x)$ es una primitiva de f (es decir $G'(x) = f(x)$) se tiene $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$.

CAMBIO DE VARIABLE EN LA INTEGRAL

Si f y g son derivables, a partir de la regla de la cadena se demuestra que $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$, lo que se interpreta como la sustitución $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$.

Integración por partes

Si f y g son derivables, a partir de la derivada de un producto se demuestra que

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx \,.$$

Ejercicio 1. Calcula el área de un círculo de radio R usando integración.

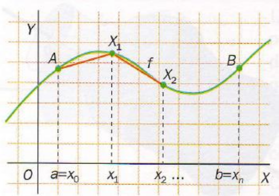
Ejercicio 2. Calcula $I = \int_0^1 x \ln(1+x^2)dx$.

Ejercicio 3. Dada la función $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$ estudie las asíntotas y la monotonía de f. Dibuje aproximadamente la gráfica de f. (Oposición Castilla y León, 2002)

5.2.3. La integral para calcular longitudes, volúmenes y superficies de cuerpos de revolución.

LONGITUD DE UNA CURVA.

La longitud de una curva puede aproximarse por la longitud de una linea quebrada que une los puntos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ y $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, 2, \ldots, n$. La longitud de esta línea quebrada es:



$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,,$$

con $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, por el Teorema del valor medio.

LONGITUD DE UNA CURVA DERIVABLE

$$L(f : [a, b]) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx\,.$$

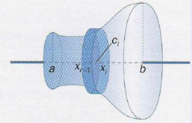
Ejercicio 4. Calcula la longitud de una circunferencia de radio R.

Ejercicio 5. Las ecuaciones paramétricas de una cicloide son $x(t) = R(t - \text{sen}\, t)$, $y(t) = R(1 - \cos t)$. Halla la longitud del arco de cicloide entre los puntos $A = (0, 0)$ y $B = (2\pi R, 0)$.

VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN.

Por el principio de Cavalieri

$$V(f : [a, b]) = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \, .$$



Ejercicio 6. Calcula el volumen de una esfera de radio R.

SUPERFICIE LATERAL DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN.

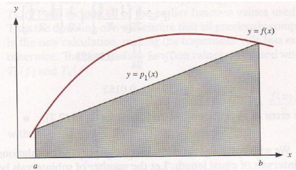
$$SL(f : [a,b]) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx\,.$$

Ejercicio 7. Calcula la superficie de una esfera de radio R.

Ejercicio 8. Prueba que el volumen del sólido de revolución generado por la gráfica de $y = 1/x$ en $[1, \infty)$ es finito, pero su superficie lateral no es finita.

5.2.4. Cálculo aproximado de la integral.

La regla del trapecio.



Si $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ no puede calcularse mediante primitivas o con reglas de integración, una solución es buscar una aproximación. Con la aproximacion lineal de la figura se obtiene la regla del **trapecio**: $T_1(f) = (b-a)\frac{f(b)+f(a)}{2}$.

Si el intervalo $[a, b]$ se divide en n subintervalos iguales cada uno de longitud $h = (b-a)/n$ se consigue la regla del **trapecio**:

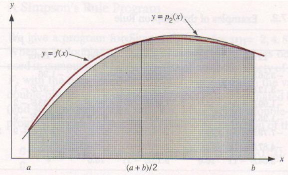
$$T_n(f) = h[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)]$$

con $x_j = a + jh, j = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Si $f \in C^2([a, b])$, $|I(f) - T_n(f)| = \frac{h^2(b-a)}{12}f''(c_n)$ con $c_n \in [a, b]$.

La regla de Simpson (Thomas Simpson, 1710-1761).

Con una aproximacion cuadrática como en la figura se obtiene la regla del **Simpson**:



$$S_2(f) = \frac{(b-a)}{6}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]\,.$$

Si el intervalo $[a, b]$ se divide en $2n$ subintervalos iguales cada uno de longitud $h = (b-a)/2n$ se consigue la regla de **Simpson**:

$$S_{2n}(f) = \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\cdots+4f(x_{2n-1})+f(x_n))]$$

con $x_j = a + jh, j = 0, 1, 2, \dots, 2n\,.$

ERROR

Si $f \in C^4([a, b])$, $|I(f) - S_{2n}(f)| = \frac{h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(c_n)$ con $c_n \in [a, b]$.