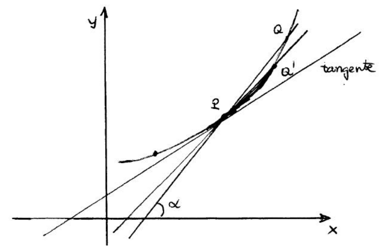
5. Análisis matemático // 5.1. Derivadas y aplicaciones.

Eugenio Hernández

COMPLEMENTOS PARA LA FORMACIÓN DISCIPLINAR EN MATEMÁTICAS

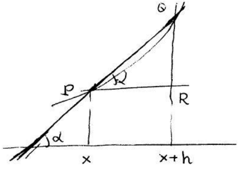
5.1.1. El problema de la tangente. Derivada.

★ Pierre de Fermat tenía una idea correcta de recta tangente a una curva en un punto P:"es la posición límite de las secantes PQ cuando Q se acerca a P sin abandonar la curva".



★ La recta que pasa por los puntos $P = (x, f(x))$ y $Q = (x + h, f(x + h))$ tiene como pendiente la expresión

$$\tan \alpha = \frac{|QR|}{|PR|} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} .$$



La posición límite se alcanza cuando h tiende a cero:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} .$$

y se llama **derivada** de la función f en el punto x .

Ejercicio 1. Usar la definición de derivada para demostrar que si $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$, se tiene que $f'(x) = nx^{n-1}$.

Ejercicio 2. Usar la definición de derivada para demostrar que si $f(x) = sen\, x$ se tiene que $f'(x) = \cos x$.

Ejercicio 3. Demostrar que la función $f(x) = |x|$ no es derivable en el punto $x = 0$.

NOTA: La derivada de una función $s = f(t)$ en un punto coincide con la velocidad instantanea de un objeto cuya distancia recorrida en función del tiempo está dada por la función f.

Poner archivo La bici.ggb

REGLAS DE DERIVACIÓN

Derivada de una suma

$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

Derivada de un producto

$(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$. En particular, si c es una constante $(cf)'(x) = cf'(x)$.

Derivada de un cociente

Si $g(x) \neq 0$ se tiene $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - g'(x)\cdot f(x)}{[g(x)]^2}$.

Regla de la cadena

$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$.

Derivada de la función inversa

Si f^{-1} existe y $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ se tiene $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Derivada de funciones elementales

Función	Derivada
x^n, $n = 1, 2, 3, \dots$	$n \cdot x^{n-1}$
x^{-n}, $n = 1, 2, 3, \dots$	$(-n) \cdot x^{-n-1}$, $x \neq 0$
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, $n = 2, 3, 4, \dots$	$\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$, $x \neq 0$
x^a, $a \in \mathbb{R}$	$a \cdot x^{a-1}$, $x > 0$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$, $x > 0$
$\log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$	$\frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$, $x > 0$
e^x	e^x
a^x	$(\ln a) \cdot a^x$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos x^2} = \sec^2 x$, $\cos x \neq 0$
$\operatorname{arcsen} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $-1 < x < 1$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ $-1 < x < 1$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Derivada de funciones compuestas

Función	Derivada
$f(x)^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$	$n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$
$f(x)^{-n}, n = 1, 2, 3, \ldots$	$(-n) \cdot f(x)^{-n-1} \cdot f'(x), \ f(x) \neq 0$
$\sqrt[n]{f(x)}, \ n = 2, 3, 4, \ldots$	$\frac{1}{n}(f(x))^{\frac{1}{n}-1} f'(x) \qquad f(x) \neq 0$
$f(x)^a, \quad a \in \mathbb{R}$	$a \cdot f(x)^{a-1} \cdot f'(x) \qquad f(x) > 0$
$\ln f(x)$	$\frac{f'(x)}{f(x)} \qquad f(x) > 0$
$\log_a f(x), \ a > 0, \ a \neq 1$	$\frac{1}{\ln a} \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad f(x) > 0$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$a^{f(x)}$	$(\ln a) \cdot a^{f(x)} \cdot f'(x)$
$\text{sen } f(x)$	$[\cos f(x)] \cdot f'(x)$
$\cos f(x)$	$[-\text{sen } f(x)] \cdot f'(x)$
$\tan f(x)$	$\frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} = [\sec^2 f(x)] f'(x), \ \cos f'(x) \neq 0$
$\text{arcsen } f(x)$	$\frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x)^2)}} \qquad -1 < f(x) < 1$
$\arccos f(x)$	$\frac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \qquad -1 < f(x) < 1$
$\arctan f(x)$	$\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$

Ejercicio 4. Calcular la derivada de la función $f(x) = x^x$.

Ejercicio 5. El coseno y el seno hiperbólico se definen por las fórmulas $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ y $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Sus funciones inversas reciben el nombre de arcocoseno y arcoseno hiperbólico (arccosh y arcsenh). Calcular las derivadas de $y = \operatorname{arccosh} x$ y de $y = \operatorname{arcsenh} x$.

Ejercicio 6. (Euler 2-SM, página 337) Halla todas las funciones derivables $y = f(x)$ tales que la tangente en cada punto (x,y) de la gráfica de la función corte a los ejes coordenados en los puntos M y N tales que (x, y) es el punto medio de M y N.

MÉTODO DE NEWTON PARA RESOLVER $f(x) = 0$

Supongamos que f es una función derivable. Comenzando con un valor $x_0 \in \mathbb{R}$, se forma la sucesión $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ mediante la fórmula de recurrencia

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},$$

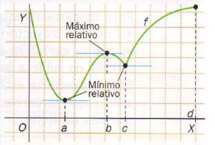
siempre que $f'(x_n) \neq 0$. Si la sucesión $\{x_n\}$ tiene límite α y $f'(\alpha) \neq 0$, el número real α es una solución de la ecuación $f(x) = 0$.

Ejercicio 7. Hallar una solución aproximada de $x^6 - x - 1 = 0$ comenzando con $x_0 = 1,5$ y calculando los seis primeros términos de la sucesión de los iterados según el método de Newton (usar $x_n - x_{n-1}$ como medida del error).

5.1.2. Máximos y mínimos locales. Puntos de inflexión

Máximos y mínimos locales

Una función f tiene un **máximo (minimo) local** en $x = p$ si en algún intervalo alrededor de p de la forma $I = (p - \delta, p + \delta)$ se tiene $f(p) \geq f(x) (f(p) \leq f(x))$ para todo x del intervalo I.

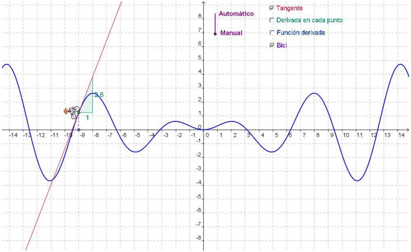


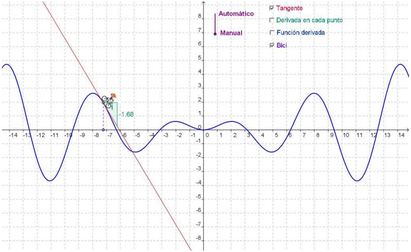
Si f tiene un máximo o mínimo local (llamados también **extremos locales**) en $x = p$ y es derivable en este punto, de debe tener $f'(p) = 0$.

NOTA: Los puntos en los que $f'(p) = 0$ se llaman **puntos críticos** de f. Los extremos relativos de una función derivable son puntos críticos, pero no todos los puntos críticos son extremos relativos (¿Ejemplo?)

Crecimiento y decrecimiento

★ Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, f es creciente en $[a, b]$.
★ Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, f es decreciente en $[a, b]$.



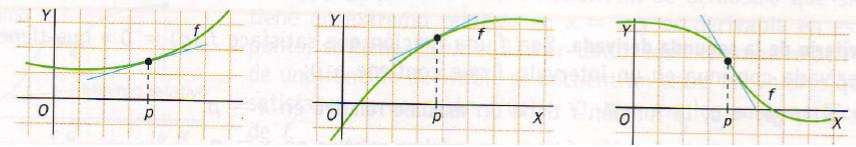


Extremos locales y derivada segunda

Sea f una función que satisface $f'(p) = 0$ y que tiene segunda derivada continua en un intervalo I que contiene a p.
★ Si $f''(p) < 0$ la función f tiene un máximo local en $x = p$.
★ Si $f''(p) > 0$ la función f tiene un mínimo local en $x = p$.

Convexidad y concavidad

Una función f derivable en p es **convexa hacía arriba (covexa hacia abajo)** en p si en algún intervalo I que contiene a p la gráfica de f está por encima (debajo) de la recta tangente a f en el punto $(p, f(p))$.



★ Si $f''(x) > 0$ en un intervalo I la función f es convexa en I .
★ Si $f''(x) < 0$ en un intervalo I la función f es cóncava en I .

D./ El error de la aproximación lineal de f cerca de p es

$$f(x) - [f(p) + f'(p)(x-p)] = \frac{1}{2} f''(\alpha)(x-p)^2 \,.$$

con α entre x y p. ■

Puntos de inflexión

En un punto de inflexión p la gráfica de una función pasa de ser convexa a cóncava o de cóncava a convexa. Si f es una función con dos derivadas en un intervalo que contiene a p se ha de tener $f''(p) = 0$.

NOTA: Para decidir si una función tiene en p un punto de inflexión no basta con saber que $f''(p) = 0$ (¿Ejemplo?). Es necesario estudiar la convexidad y la concavidad en un intervalo que contenga a p.

Ejercicio 8. (Oposiciones 2010, Madrid, Problema 4). Sea f una función de variable real, $f \in C^3(\mathbb{R})$, tal que

$$\lim_{x \to 0} \left(1 + x + \frac{f(x)}{x} \right)^{1/x} = e^3 .$$

Calcule razonadamente $f(0), f'(0)$ y $f''(0)$.