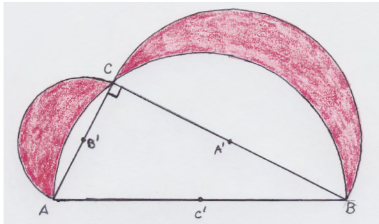
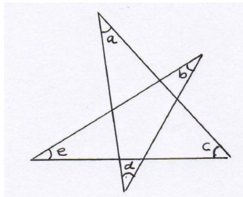
Máster de Formación de profesorado de Secundaria Obligatoria y Bachillerato.
Curso 2023-2024
COMPLEMENTOS DE MATEMÁTICAS PARA LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

HOJA 4 DE EJERCICIOS: Geometría
(Para entregar el 1 de abril de 2024 antes de las 23:59.)

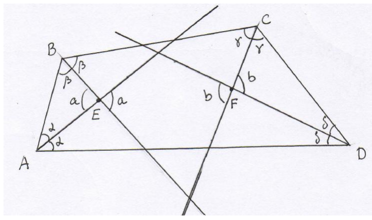
1. En un triángulo rectángulo ABC, con ángulo recto en C, trazar las semicircunferencias de centros el punto medio de cada lado y cuyo diámetro es el lado correspondiente. Demostrar que la suma de las áreas de las lúnulas que se forman (las zonas coloreadas de la figura) es igual al área del triángulo ABC. (Sugerencia: usar el Teorema de Pitágoras.)



2. Hallar la suma de los ángulos interiores de una estrella de cinco puntas usando un argumento visual similar al de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.



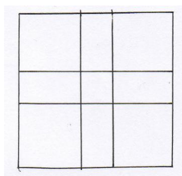
3. Considerar un cuadrilátero convexo en el que las bisectrices de sus cuatro ángulos forman un nuevo cuadrilátero. Demostrar que este nuevo cuadrilátero la suma de los ángulos interiores de vértices opuestos es 180º (en la figura $a + b = 180$)



4. Utiliza la figura de la derecha para demostrar visualmente la fórmula

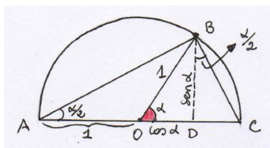
$$F_{n+1}^2 = 4F_{n-1}^2 + 4F_{n-1}F_{n-2} + F_{n-2}^2$$

donde los F_n son los números de la sucesión de Fibonacci.



5. Usar la figura de la derecha para mostrar las fórmulas del seno y del coseno del ángulo mitad:

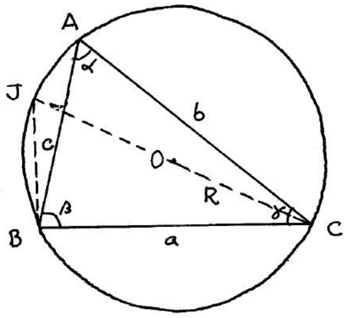
$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{2}, \qquad \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{2}.$$



6. (Ley del seno) Para un triángulo ABC inscrito en una circunferencia de radio R se tiene

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

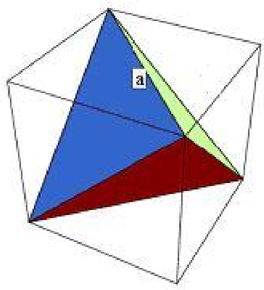
(Indicación: trazar el diámetro CJ y la cuerda BJ como en la figura)



7. i) Hallar los valores de $\text{sen}(\frac{\pi}{8}), \cos(\frac{\pi}{8})$ y $\text{tg}(\frac{\pi}{8})$ a partir de las razones trigonométricas de un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes.

   ii) Hallar las áreas de un octógono regular inscrito y otro circunscrito a un círculo de radio 1.

8. Un tetraedro regular cuya arista tiene longitud a se coloca dentro de un cubo como en la figura, dejando vacío un espacio ocupado por cuatro pirámides rectas. Utiliza este puzle para hallar el volumen del tetraedro regular en función de la longitud a de su lado.



9. A partir de la estructura verticial dada halla en cada uno de los siguientes casos el número de caras de cada tipo del poliedro considerado, el número de vértices y el de aristas:

   a) Cuboctaedro truncado (estructura verticial: $4-6-8$).

   b) Icosidodecaedro (estructura verticial: $3-5-3-5$).

   c) Icosidodecaedro truncado (estructura verticial: $4-6-10$).

10. (a) Supongamos que en cada vértice de un poliedro semirregular se juntan un cuadrado, un hexágono y un polígono regular de p lados, siendo $p > 6$. Probar que solo se puede tener $p = 8$ o $p = 10$. Mirando la tabla proporcionada en clase, indicar el nombre de cada uno de estos poliedros semirregulares.

    (b) Supongamos que en cada vértice de un poliedro semirregular se juntan un triángulo, dos cuadrados y un polígono regular de p lados, siendo $p > 4$. Probar que $p = 5$ e indicar el nombre de este poliedro semirregular.