

HOJA 2 DE EJERCICIOS

(Para entregar el 12 de febrero de 2024.)

Álgebra lineal

1. Resolver los siguientes SEL usando el método de Gauss:

$$a) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \quad d) \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 3 \end{cases}$$

2. Hallar la matrices inversas de las siguientes matrices utilizando el método de Gauss:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1/a \\ a & -1 \end{pmatrix} \quad a \neq 0; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad a \neq 0.$$

3. Calcular el determinante de la matriz de orden 3 dada por $A_3 = \begin{pmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{pmatrix}$. Con la misma regla que se genera la matriz A_3 considera la matriz A_n de orden n . ¿Cuál es su determinante?

4. Hallar un polinomio f de grado 2 tal que $f(1) = 2$, $f(-1) = 4$ y $f(3) = 16$.

5. Hallar todos los valores de m para los que el siguiente sistema posee soluciones no triviales:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + my - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}.$$

6. Determinar la posición relativa de los siguientes pares de rectas y hallar el punto de intersección si se cortan:

a) $(x, y) = (2, 1) + t(1, 1)$ y $(x, y) = (1, 0) + s(-5, -5)$.

b) $2x - y = 4$ y $(x, y) = (2, 0) + t(-2, 4)$.

7. Dados los siguientes rectas en el espacio, determinar su posición relativa y si se cortan, hallar el punto de intersección:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ x - 3y = 4 \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ y - z = -1 \end{cases}.$$

8. Dados los puntos $P = (1, 0, 0)$, $Q = (1, 0, 1)$ y $R = (2, 3, -2)$ y los planos de ecuaciones $\pi_1 : 3x - y + z = 3$ y $\pi_2 : x + 2y - z = 2$ se pide:

a) Hallar la distancia de P a Q .

- b) La ecuación cartesiana del plano perpendicular al vector \overrightarrow{PQ} que pasa por el punto R .
- c) La proyección del punto P sobre el plano π_1 .
- d) La distancia de Q al plano π_2 .

9. Dados los puntos $P = (0, 0, 1)$ y $Q = (0, 3, 0)$ y las rectas de ecuaciones $r_1 : (x, y, z) = (1, 1, 0) + t(2, 0, 1)$ y $r_2 = (0, 0, -2) + s(1, -1, 3)$ se pide:

- a) Demostrar que las rectas r_1 y r_2 se cruzan.
- b) Ecuaciones paramétricas y cartesianas de la recta paralela a r_1 que corta a r_2 en el punto $(0, 0, -2)$.
- c) La proyección del punto Q sobre la recta r_1 .
- d) La distancia de P a la recta r_2 .

10. Dada la pirámide de base $ABCD$ y vértice E , donde $A = (2, 0, 0)$, $B = (3, 1, 0)$, $C = (0, 1, 0)$, $D = (-1, 0, 0)$ y $E = (1, 1, 3)$, hallar:

- a) El área de la cara ABE
- b) El área de la base.
- c) La altura del prisma.