Geometría Euclídea II:
Isometrías o Movimientos.

1. Encuentra la expresión analítica, con respecto al sistema de referencia canónico, de las siguientes isometrías:

a) La simetría deslizante de eje paralelo a la recta $2x + y = 3$ y que transforma $(2, 1)$ en $(1, 0)$.

b) El giro de ángulo $\pi/3$ que lleva $(2, 1)$ en $(1, 0)$.

2. Determina las ecuaciones (respecto del sistema de referencia canónico de $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$) de la simetría axial con respecto a la recta $y + x = 1$.

3. Considera la familia de aplicaciones afines de $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ dadas por las ecuaciones (con respecto al sistema de referencia canónico):

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cy + a \\ x + b \end{pmatrix}.$$

Determina los valores de los parámetros a, b y c para los que estas aplicaciones afines son movimientos y calcula sus elementos geométricos.

4. Sea $\mathcal{R} = \{P; \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ un sistema de referencia ortonormal (con respecto al producto escalar usual) en el plano afín $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Consideremos los puntos de coordenadas $A = (1, 0)_\mathcal{R}$, $B = (0, -1)_\mathcal{R}$, $C = (2, 2)_\mathcal{R}$ y $D = (-2, -2)_\mathcal{R}$.

a) ¿Existe alguna traslación T en $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ tal que $T(A) = B$ y $T(C) = D$?

b) ¿Existe alguna simetría axial S en $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ tal que $S(A) = B$ y $S(C) = D$? ¿Es única? En el caso de respuestas positivas, calcula los elementos geométricos de S.

5. Sean $\mathcal{R} = \{\mathcal{O}; e_1, e_2\}$ una referencia ortonormal y $f : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ un giro de ángulo $\pi/2$ y centro un punto en la recta $x + y = 1$.

a) Escribe la matriz de la aplicación lineal asociada a f.

b) Escribe la expresión en coordenadas de f respecto de $\mathcal{R}$.

c) Calcula la imagen por f del punto $(1, 1)$.

d) Describe geométricamente las imágenes de $(1, 1)$ por todos los giros de ángulo $\pi/2$ y centro un punto en la recta $x + y = 1$.

6. Determina las ecuaciones (respecto del sistema de referencia canónico de $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$) del movimiento helicoidal de eje la recta $x = y = z$, ángulo de rotación $\theta = \pi$ (con orientación dada por el vector $(1, 1, 1)$) y vector de desplazamiento $v = (3, 3, 3)$.

7. Encuentra la expresión analítica, respecto al sistema de referencia canónico, de las siguientes isometrías de $\mathbb{R}^3$:

a) La reflexión o simetría respecto al plano $3x - y + 2z = 1$.

b) La rotación helicoidal respecto al eje $\langle(1, -1, 0)\rangle$, con ángulo π (con orientación dada por el vector $(1, -1, 0)$) y vector desplazamiento $(2, -2, 0)$.

8. Estudia las siguientes isometrías del plano:

$$\begin{cases} x' = -2 + \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y. \end{cases}$$

9. Estudia las siguientes isometrías de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x' = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}z \\ y' = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}z \\ z' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}z \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = 1 + y \\ y' = 1 - z \\ z' = -x \end{cases}$$

10. Sea $f_i : \mathbb{A}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ la aplicación afín cuya expresión analítica respecto al sistema de referencia canónico es $f_i(X) = a_i + AX$ con

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 7 & -4 \\ 1 & 4 & 8 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Para $i = 1, 2$:

a) Demuestra que f_i es un movimiento.

b) Decide de manera razonada si f_i preserva o invierte la orientación.

c) ¿Tiene f_i puntos fijos?

d) Clasifica el movimiento y describe sus elementos geométricos.