Geometría Afín V: Aplicaciones afines.

1. Calcula las ecuaciones de la aplicación afín $T\colon \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ que cumple $T(1,1) = (2,3)$, $T(3,2) = (3,8)$ y $T(2,3) = (1,7)$, si existe.

2. Sea $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ una aplicación afín. Se dice que una variedad lineal $L \subset \mathbb{A}$ es invariante por f si para todo $Q \in L$ se tiene que $f(Q) \in L$.

a) Demuestra que si L es invariante por f entonces $\overrightarrow{L}$ es un subespacio invariante por $\overrightarrow{f}$;

b) Ilustra mediante, un ejemplo, que el recíproco del apartado anterior no tiene por qué ser cierto.

3. Sea $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una aplicación afín y sea $L(f) \subset \mathbb{A}$ el conjunto de puntos fijos por f. Demostrar que si $L(f) \neq \emptyset$ entonces $L(f)$ es un subespacio afín y $\overrightarrow{L(f)} = L(\overrightarrow{f})$, donde $L(\overrightarrow{f}) \subset \overrightarrow{\mathbb{A}}$ denota el subespacio vectorial de los vectores fijos por $\overrightarrow{f}$.

4. Calcula las ecuaciones, si existe, de la homotecia $f\colon \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ en los siguientes casos:

a) $f(1,1) = (-3,0)$ y $f(-1,0) = (-1,1)$. **b)** $f(1,1) = (4,2)$ y $f(-1,0) = (-2,-1)$

5. Consideramos las rectas en $\mathbb{R}^2$: $r_1 : x + 2y - 4 = 0$ y $r_2 : x = 2y$. Calcular la expresión analítica con respecto al sistema referencia canónico de $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ de:

a) la simetría sobre r_1 en la dirección de r_2.

b) la proyección sobre r_1 en la dirección de r_2.

Geometría Euclídea I: Distancias.

6. En el espacio afín euclideo $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual, considerar el punto $p == (3,4,2,2)$ y la variedad lineal L de ecuaciones $\{x - y - z = 1,\ x + z + w = -1\}$. Calcula la distancia del punto p a la variedad lineal L.

7. En el espacio afín $\mathbb{R}^3$, considerar el producto escalar $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dado por

$$\phi(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

dado en coordenadas con respecto a la base canónica. Calcula la distancia del punto $p = (0,0,1)$ a la recta de ecuación $\ell : (1{,}0,0) + t(1,-1,0), t \in \mathbb{R}$ en el espacio afín euclídeo con el producto escalar dado por ϕ.

8. En el espacio afín $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ con su estructura euclídea usual, calcula la distancia entre las rectas r y s que vienen dadas en un sistema de referencia ortonormal por las siguientes ecuaciones implícitas:

$$r : \begin{cases} x - y = 2 \\ x + z = 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad s : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - 2z = -1 \end{cases} .$$

Halla un punto $p \in r$ y un punto $q \in s$ tales que $d(r,s) = d(p,q)$. ¿Son únicos los puntos p y q?

9. El el espacio afín $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ con su estructura euclídea usual, calcula la distancia entre los espacios afines L_1 y L_2 que vienen dadas en un sistema de referencia ortonormal por las siguientes ecuaciones implícitas:

$$L_1 : \begin{cases} x + z + t = 1 \\ y - z - t = 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad L_2 : \begin{cases} x + y = 1 \\ y - z - 3t = 3 \end{cases} .$$

Halla puntos $p \in L_1$ y $q \in L_2$ tales que $d(L_1, L_2) = d(p, q)$. ¿Son únicos esos puntos p y q?

10. Halla una fórmula, en función de α y β, para calcular la distancia entre las rectas del espacio afín $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ con su estructura euclídea usual:

$$r := (1, 0, 1) + \langle (1,\ \alpha,\ 0) \rangle \quad \text{y} \quad s := (1, 1, 2) + \langle (1,\ 1,\ \beta) \rangle .$$

11. En $\mathbb{R}^3$, considera el producto escalar cuya matriz con respecto a la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

Calcula la distancia del punto $(1, 1, -2)$ al plano que pasa por los puntos de coordenadas cartesianas $a = (1, -1, 1)$, $b = (1, 1, 1)$ y $c = (2, -1, 2)$ en la referencia canónica.