Geometría Afín II:
Posición relativa de variedades lineales. Intersección y suma. Sistemas de referencia baricéntricos.

1. Considera el siguiente par de rectas del espacio afín $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$:

$$r = (1,0,1) + \langle (1,\alpha,0) \rangle, \quad \text{y} \quad s = (1,1,2) + \langle (1,1,\beta) \rangle.$$

a) Estudia la posición relativa r y s dependiendo de los valores de α y β.

b) Describe la variedad lineal $r+s$ dependiendo de los valores de α y β.

2. En $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, considera los conjuntos

$$L = \{(x,y,z) : x + 2y - z = 1\} \quad \text{y} \quad M = \{(x,y,z) : x - y + 2z = 2 \text{ y } x - z = 1\}.$$

a) Demuestra que L y M son variedades lineales.

b) Determina si L y M se cortan, son paralelas, o se cruzan. Si se cortan, halla su intersección.

3. En $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$, considera los conjuntos

$$L_1 = \{(x,y,z,w) : x = 1, y = 2\} \quad \text{y} \quad L_2 = \{(x,y,z,w) : z = -2, w = 3\}.$$

a) Demuestra que L_1 y L_2 son variedades lineales.

b) Determina si L_1 y L_2 se cortan, son paralelas, o se cruzan. Si se cortan, halla su intersección.

4. En el espacio afín $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ estudia la posición relativa de las variedades lineales

$$L_1 = (1,0,0) + \langle (0,2,1) \rangle, \quad \text{y} \quad L_2 = \{(x,y,z) : x + 2y + z = 1\}.$$

Describe las variedades lineales intersección y suma.

5. Consideremos las rectas $L_1 = \{x + y + z = x + 2y = 0\}$, $L_2 = \{2x + 2y + z = 3,\ x + y = 2\}$ y $L_3 = \{3x + 2y + 2z = 2,\ 2x + y + z = 0\}$ del espacio afín $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. Demuestra que se cruzan dos a dos.

6. Decide, de manera razonada, si los siguientes resultados son verdaderos o falsos:

a) Dos rectas paralelas en $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ o bien son coincidentes, o bien no se cortan.

b) Dos rectas en $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ que no se cortan deben ser paralelas.

c) En $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ con $n \geq 3$ dos rectas que no se cortan no tienen por qué ser paralelas.

7. Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimensión n y $L_1, L_2 \subset \mathbb{A}$ subespacios afines. Demuestra que si la dimensión de L_1 es $n-1$ y la dimensión de $L_2 \geq 1$, entonces L_1 y L_2 no se pueden cruzar.

8. En el espacio afín $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ de dimensión n, sean $L_1 = a_1 + V_1$ y $L_2 = a_2 + V_2$ dos subespacios afines. Demuestra que si $V = V_1 \oplus V_2$, entonces L_1 y L_2 se cortan en un punto.

9. Sean $A = (1,1,1), B = (1,2,3), C = (2,3,1)$ y $D = (3,1,2)$ cuatro puntos de $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ dados por sus coordenadas cartesianas respecto a un sistema de referencia $\mathcal{R}$.

a) Demuestra que $\mathcal{R}' = \{A, B, C, D\}$ es un sistema de referencia baricéntrico.

b) Calcula las coordenadas cartesianas respecto a $\mathcal{R}$ del baricentro de A, B, C, D.

c) Si $\mathcal{R} = \{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$, halla las coordenadas baricéntricas de O respecto a $\mathcal{R}'$.

10. Demuestra que en $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ los puntos medios de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo.

11. Sean O un punto y sean $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ dos vectores linealmente independientes. A todo escalar λ, se le asocian los puntos A y B tales que

$$\overrightarrow{OA} = \lambda \overrightarrow{u}, \quad \overrightarrow{OB} = \lambda \overrightarrow{v}.$$

Determina el baricentro de A y B en función de λ.

12. Halla las ecuaciones baricéntricas del plano que contiene a la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = z$$

y al punto $P = (-1, -2, 5)$ en $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

13. En $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, considera los puntos P_0, P_1, P_2, Q_0, Q_1 y Q_2, cuyas coordenadas cartesianas en el sistema de referencia cartesiano $\mathcal{R}_C = \{P_0; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ son las siguientes:

$$\begin{array}{lll} P_0 = (0,0), & P_1 = (1,7), & P_2 = (1,1) \\ Q_0 = (-1,1), & Q_1 = (1,4), & Q_2 = (3,0) \end{array}$$

a) Demuestra que los puntos de $\mathcal{R}' = \{P_0, P_1, P_2\}$ son afínmente independientes. Demuestra que los puntos de $\mathcal{R}'' = \{Q_0, Q_1, Q_2\}$ son afínmente independientes.

b) Halla las coordenadas baricéntricas de P_0, P_1 y P_2 respecto a $\mathcal{R}''$ y las de Q_0, Q_1 y Q_2 respecto a $\mathcal{R}'$.

Considera los sistemas de referencia cartesianos $\mathcal{R}'_C = \{P_0; \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}\}$ y $\mathcal{R}''_C = \{Q_0; \overrightarrow{Q_0Q_1}, \overrightarrow{Q_0Q_2}\}$.

c) Calcula las coordenadas cartesianas de Q_0, Q_1 y Q_2 respecto a $\mathcal{R}'_C$ y las de P_0, P_1 y P_2 respecto a $\mathcal{R}''_C$.

d) Describe las ecuaciones generales de cambio de coordenadas cartesianas entre $\mathcal{R}'_C$ y $\mathcal{R}''_C$.

e) Describe las ecuaciones generales de cambio de coordenadas baricéntricas entre $\mathcal{R}'$ y $\mathcal{R}''$.