Espacios euclídeos y hermíticos II. Ortogonalidad. Gram-Schmidt. Complemento ortogonal

.

1. Sea V un espacio vectorial euclídeo y $u, v \in V$. Demuestra que:

a) Los vectores $u+v$ y $u-v$ son ortogonales si y sólo si $\|u\| = \|v\|$.

b) Los vectores u y v son ortogonales si y sólo si $\|u+\lambda v\| \geq \|u\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

¿Valen las equivalencias anteriores en un espacio hermítico?

2. Sea V un espacio euclídeo o hermítico y $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Demuestra la siguiente generalización del teorema de Pitágoras: Si $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son ortogonales dos a dos, entonces

$$\|v_1 + v_2 + \cdots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \cdots + \|v_n\|^2 .$$

¿Es cierto el recíproco?

3. Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ y $\mathbb{K}_n = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] : \text{grado}(p(x)) \leq n\}$ para un cierto $n \in \mathbb{N}$. Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ definimos en $\mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x]$ la aplicación

$$\phi(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$

a) Demuestra que ϕ es un producto escalar.

b) Describe el subespacio de polinomios ortogonales al polinomio x.

c) Calcula una base ortonormal de $\mathbb{R}_3[x]$.

4. Considera la forma bilineal $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\psi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

a) Decide de manera razonada si ψ es un producto escalar.

b) Encuentra una base de $\mathbb{R}^3$ respecto a la que la matriz de ψ sea diagonal.

5. Sea $V = \mathbb{C}^3$ y sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base estándar. Sea $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$ la forma sesquilineal cuya matriz asociada respecto a $\mathcal{B}$ es:

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 2 & 1+i \\ 0 & 1-i & 3 \end{pmatrix}$$

a) Demuestra que φ es un producto hermítico.

b) Calcula una base ortonormal de V respecto al producto escalar definido por φ.

6. Sean $u_1 = (-2,-1,1)$, $u_2 = (0,-1,0)$ y $u_3 = (1,-1,0)$ vectores de $\mathbb{R}^3$.

a) Demuestra que $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

b) Demuestra que existe un producto escalar ϕ respecto al cual $\mathcal{B}$ es una base ortogonal. Decide de manera razonada si ϕ es único con esta propiedad.

c) Demuestra que existe un producto escalar ψ respecto al cual $\mathcal{B}$ es una base ortonormal. Decide de manera razonada si ψ es único con esta propiedad. Describe la matriz de ψ respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

7. En $\mathbb{R}^3$ encuentra un producto escalar para el cual el complemento ortogonal del plano $x = 0$ sea la recta $\{x = y, z = 0\}$. ¿Es único ese producto escalar?

8. Calcula el complemento ortogonal del subespacio

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,\ 2x_1 - x_2 = 0\},$$

cuando se considera en $\mathbb{R}^4$ el producto escalar usual.

9. Calcula el complemento ortogonal de la recta $L = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 = x_2 = x_3\}$ respecto al producto escalar habitual y respecto al siguiente producto escalar

$$\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_1 + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3)$$

10. En $\mathbb{R}^3$, se considera el producto escalar con matriz en la base canónica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Calcula una base ortonormal $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$.

b) Sea W el subespacio ortogonal al vector de coordenadas $(2,0,1)_{\mathcal{B}}$. Describe W en las coordenadas de la base canónica.

11. Sea V un espacio vectorial euclídeo o hermítico.

a) Si W_1, W_2 son subespacios vectoriales de V, demuestra que $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$.

b) Si V es de dimensión finita y W es un subespacio vectorial de V, demuestra que $W^{\perp\perp} = W$.

c) Si V es de dimensión finita y W_1, W_2 son subespacios vectoriales de V, demuestra que $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$.