Cuádricas

1. Dadas las siguiente superficies de segundo grado determina sus tipos, así como sus formas canónicas y sus elementos geométricos principales:

a) $6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4xy + 4xz = 0$.

b) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz - 2yz = 1$.

c) $2x^2 - 6y^2 - 2z^2 - 2xz - 10x - 6y - 1 = 0$.

d) $-2y^2 + xz - 4y + 6z + 5 = 0$.

e) $2x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 5xy - 2xz - 2yz - 2x - 2y + z = 0$.

f) $3x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2yz + 4x + 2y - 5z + 7 = 0$.

2. Considera las cuádricas de ecuaciones

$$x^2 - 2y^2 + \alpha z^2 - 2xz + 2yz + 2x + 1 = 0,$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Estudia para qué valores de α es un paraboloide (elíptico o hiperbólico).

3. Considera la forma cuádratica $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que se expresa, con respecto al sistema de referencia cartesiano $\mathcal{R} = \{\mathcal{O}; e_1,\ e_2,\ e_3\}$, como

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 6x_3^2\,.$$

a) Calcula el rango de Q.

b) Calcula los índices de inercia de Q.

c) Calcula una forma canónica de Q (i.e. sin términos cruzados) y describe la nueva base respecto a la que has expresado Q en forma canónica.

d) Determina el tipo de cuádrica de $x_1^2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 6x_3^2 = 1$.