

Cónicas

1. Calcula la ecuación, el centro y el radio de la circunferencia del plano que pasa por los puntos  $(1, 3)$  y  $(3, 5)$  y tiene el centro sobre la recta  $x + 2y = 3$ .
2. Encuentra las ecuaciones de las parábolas de focos  $(1, a)$  y vértices  $(a, a)$  donde  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 1$ . Demuestra que sólo hay un valor de  $a$  para el cual la parábola correspondiente pasa por el origen.
3. Encuentra las ecuaciones de las elipses de focos  $(0, \mu)$  y  $(-\mu, 2)$  y semieje mayor  $\sqrt{2}$ , donde  $\mu \in \mathbb{R}$ . Demuestra que existen dos elipses de la familia que pasan por el origen.
4. Halla la ecuación de la hipérbola que tiene un foco en el punto  $(2, -1)$  y sus asíntotas son las rectas  $x = 0$  y  $3x - 4y = 0$ .
5. Clasifica (y da las ecuaciones del movimiento de  $\mathbb{R}^2$  que las llevan a su forma canónica) las siguientes cónicas:
  - a)  $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 6y + 1 = 0$ .
  - b)  $2x - 2x^2 + y^2 + 4xy - 1 = 0$ .
  - c)  $x^2 - 2y^2 - xy + 2x + 5y - 3 = 0$ .
6. Clasifica las cónicas de ecuación

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \alpha y^2 + (\alpha + \beta)(x + y) + 1 = 0$$

para los distintos valores de los parámetros  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

7. En el sistema de referencia ortonormal usual, considera la cónica de ecuación

$$x^2 - 2xy + y^2 + x + y = 0.$$

- a) Determina el tipo de cónica y decide si es degenerada o no.
  - b) Encuentra un sistema de referencia ortonormal respecto al que la ecuación de la cónica sea canónica.
  - c) Determina su centro y sus ejes si es una elipse o una hipérbola o su vértice y sus ejes si es una parábola.
8. Clasifica la cónica de ecuación  $x^2 - xy + y^2 - 3x - 2 = 0$ . Determina su centro y sus ejes si es una elipse o una hipérbola o su vértice y sus ejes si es una parábola, respecto al sistema de referencia usual.
  9. Consideremos el plano afín  $A^2(\mathbb{R})$  con el sistema de referencia habitual. Clasifica la cónica de ecuación

$$x^2 + y^2 + 4xy + 2x + 2/3 = 0$$

y *describe* sus elementos geométricos principales (centro y ejes si es una elipse o una hipérbola, vértice, eje principal y directriz si es una parábola) siempre con respecto al sistema de referencia usual.

10. Dado el cono  $\mathcal{C}$  de ecuación  $6x^2 + y^2 = z^2$  y el plano  $\pi$  de ecuación  $y = 2z + 3$ , calcula la ecuación de la cónica que se obtiene al intersecar  $\mathcal{C}$  con  $\pi$ .