

Repaso de Álgebra Lineal

1. Sean $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 0, z + t = 0\}$ y G el subespacio vectorial de \mathbb{R}^4 generado por $\{(1, 0, 0, 1), (1, -1, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (2, 0, 0, 1)\}$.

a) Demuestra que F es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^4 .

b) Calcula una base de F y su dimensión.

c) ¿Cuál es el mínimo número de ecuaciones lineales homogéneas que necesitamos para describir G ? Da un ejemplo de sistema lineal homogéneo cuyo conjunto de soluciones sea G . ¿Es este sistema único con esta propiedad?

d) Calcula una base del subespacio $F + G$.

e) Describe el subespacio $F \cap G$ de dos maneras distintas.

f) Comprueba que se verifica la fórmula de Grassman sobre las dimensiones de los subespacios que aparecen en el problema.

2. Dados los subespacios de \mathbb{R}^4 :

$$U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : b + c + d = 0\} \quad \text{y} \quad V = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a + b = 0, c = 2d\},$$

determina una base y la dimensión de U , V , $U + V$ y $U \cap V$.

3. Consideremos los vectores $\vec{u}_1 = (1, 1)$ y $\vec{u}_2 = (-1, 1)$ de \mathbb{R}^2 y una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$(1) \quad f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 \quad \text{y} \quad f(\vec{u}_2) = -\vec{u}_2.$$

a) Demuestra que $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es una base de \mathbb{R}^2 .

b) Decide, razonadamente, si f está completamente determinada por las condiciones descritas en (1).

c) Escribe la matriz de f respecto a la base \mathcal{B} .

d) Calcula la imagen de $(1, 3)$ por f .

e) Sea (a, b) un vector cualquiera de \mathbb{R}^2 . Calcula su imagen por f y expresa sus coordenadas respecto a la base canónica \mathcal{B}_c de \mathbb{R}^2 .

f) Usando el apartado anterior, calcula las imágenes por f de los vectores de la base canónica.

g) Describe geoméricamente el efecto que tiene aplicar f a un vector cualquiera de \mathbb{R}^2 .

4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por:

$$f(x, y, z) = (0, x - 2y + z).$$

a) Halla la matriz de f en la base canónica.

b) Calcula el núcleo e imagen de f , bases y dimensiones respectivas.

c) Halla la matriz de la aplicación f respecto de las bases $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ de \mathbb{R}^3 , y $\mathcal{B}' = \{(1, 1), (0, 1)\}$ de \mathbb{R}^2 .

5. Sea $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

- Describe las imágenes por g de los vectores de la base canónica de \mathbb{R}^3 .
 - ¿Cuál es la dimensión de la imagen de g ? ¿Es g inyectiva?
 - Describe la imagen de g : fijado un vector $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, da condiciones necesarias y suficientes para que (a, b, c) esté en la imagen de g .
 - Describe los subespacios invariantes por g .
 - Da una interpretación geométrica del efecto que tiene g al actuar sobre los vectores de \mathbb{R}^3 .
6. Calcula los valores de a, b, c y d sabiendo que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & d \\ 2 & b & -2 \\ 3 & c & 3 \end{pmatrix}$$

admite como autovectores a $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (-1, 1, 0)$ y $\vec{w} = (0, 1, -1)$.

7. Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneas:

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C\vec{x} = \vec{0}.$$

Contesta de manera razonada a las siguientes preguntas *sin hacer ningún cálculo*:

- Sea $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz asociada está dada por C . Al resolver el sistema de ecuaciones (2), ¿qué información obtenemos sobre h ?
- ¿Qué información nos da el número de soluciones del sistema (2) sobre los vectores columna de C ?
- Sea ahora $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ un vector cualquiera. Observa que $C\vec{x} = (a, b, c)^t$ se puede escribir como

$$(3) \quad x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

¿Qué significa, en términos de h , que el sistema (3) tenga o no solución?

- ¿Qué significa, en términos de los vectores columna de C , que el sistema (3) tenga o no solución?