Primer Examen Intermedio

Viernes, 1 de marzo de 2024

APELLIDOS: ____________________ NOMBRE: ____________________

DNI: ____________________ GRUPO: ____________________

El símbolo $\mathcal{C}$ denota la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Problema 1. (2 puntos) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{R}$, considerar en $\mathbb{R}^3$ la aplicación bilineal

$$\phi_{\alpha,m}((x,y,z),(x',y',z')) = (x,y,z) \begin{pmatrix} 1 & 1 & m^2+1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 2m^2 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} .$$

Calcular los valores de α y m para los que $\phi_{\alpha,m}$ es un producto escalar.

Problema 2. (2 puntos) En $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual, hallar las ecuaciones en la base canónica de la simetría, S_W, con respecto a la recta vectorial W generada por el vector $\vec{w}_1 = (-1,3)_{\mathcal{C}}$.

Problema 3. (2 puntos) Hallar una base del complemento ortogonal del subespacio $V = \{(x,y,z)_{\mathcal{C}} : x = y\}$ de $\mathbb{R}^3$, con respecto al producto escalar $\phi_{\alpha,m}$ del problema **1**, para $\alpha = 7$ y $m = 1$.

Problema 4. (2 puntos) En $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual, considerar la aplicación $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuya matriz en la base $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1 = (1,0)_{\mathcal{C}}, \vec{u}_2 = (1,1)_{\mathcal{C}}\}$ es

$$M_{\mathcal{B}}(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

(a) (1 punto) Probar que A es una aplicación ortogonal.

(b) (1 punto) Decidir, razonadamente, si se corresponde con un giro (en este caso, indicar el ángulo de giro) o una simetría (en este caso, hallar el eje de simetría.)

Problema 5. (2 puntos) Sea $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Para un subespacio vectorial V de $\mathbb{R}^2$, definir

$$\mathcal{E}(\mathcal{C};V) = \|\vec{e}_1 - P_V(\vec{e}_1)\|^2 + \|\vec{e}_2 - P_V(\vec{e}_2)\|^2 ,$$

donde P_V denota la proyección ortogonal sobre V con el producto escalar usual.

(a) (1 punto) Sea V_1 el subespacio vectorial generado por el vector $\vec{u} = (1,3)_{\mathcal{C}}$. Calcular $\mathcal{E}(\mathcal{C};V_1)$.

(b) (1 punto) Calcular $\mathcal{E}(\mathcal{C};V)$ para cualquier subespacio vectorial V de dimensión 1 de $\mathbb{R}^2$.

TIEMPO: 1 HORA Y 30 MINUTOS.