# 6. Probabilidad 2

Eugenio Hernández

Universidad Autónoma de Madrid

COMPLEMENTOS PARA LA FORMACIÓN DISCIPLINAR
EN MATEMÁTICAS
Curso 2022-2023

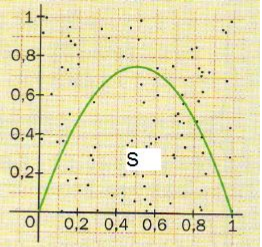
## 6.4.1. La paradoja del caballero de Méré.

En Francia, en el siglo XVII, en los casinos se jugaba a estos dos juegos:
A) Apostar sobre el resultado de que al lanzar cuatro dados apareciera al menos un 6.
B) Apostar sobre el resultado de que en 24 lanzamientos de un par de dados apareciese al menos una vez un doble 6.
Antoine Gombaud, el caballero de Méré, pensaba que ambos resultados tenian la misa probabilidad de aparecer. Decía:
A) Si lanzo un dado la probabilidad de que aparezca un 6 es $1/6$. Como lanzo cuatro dados la probabilidad es $4/6 = 2/3$.
B) Si lanzo dos dados la probabilidad de obtener un doble 6 es $1/36$. Como lo hago 24 veces la probabilidad es $24/36 = 2/3$.
Sin embargo, los jugadores habian concluido, por experiencia que jugar a A produce más ganancias que jugar a B. **Calcula las probabilidades en cada caso para mostrar que los jugadores tenían razón.**

## 6.4.2. Método de Montecarlo para calcular áreas.

El método de Montecarlo puede usarse para aproximar el área de una región $S$ situada en un cuadrado unidad delimitada por la gráfica de una función $f$.

Se genera al azar un punto (dos coordenadas) en el cuadrado unidad. La proporción de puntos que cae dentro de la región $S$ es una aproximación al área de la gráfica.




Esta técnica se puede generalizar para calcular $A(S) = \int_a^b f(x)\,dx$, donde $f$ es una función positiva y continua en el intervalo $[a, b]$

Hacer el experimento con Excel para un triángulo y para una parábola.

# Método de Montecarlo con EXCEL.

1) En una columna X escribir =ALEATORIO() para producir un número aleatorio entre 0 y 1.

3) Repetir el paso anterior en otra columna Y.

3) Para hallar el área de la figura bajo la gráfica de y=f(x) en el intervalo [0,1] escribir en una nueva columna: =SI(Celda Y < f(Celda X);1;0).

4) Repetir los pasos anteriores la veces que se desee (10, 100, 1000,...) arrastrando la parte inferior derecha de las celdas.

5) =CONTAR.SI(Celda1:Celda2;"= 1")Cuenta el número de unos en las celdas entre Celda1 y Celda2.

6) El resultado anterior dividido entre el número de experimentos produce una aproximación al área bajo la gráfica de y=f(x).

**La tecla F9 produce un nuevo número aleatorio**

## 6.4.3. Probabilidad geométrica: la aguja de Buffon.

El problema de la aguja de Buffon es un problema de probabilidad geométrica de sencilla realización y que permite aproximar el valor de $\pi$. Fue resuelto en 1777 por el naturalista francés Buffon.

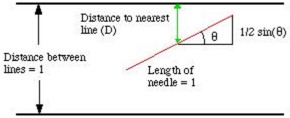
Se trata de lanzar una aguja de longitud $\ell$ sobre una trama de papel en la que se han trazado rectas paralelas distanciadas entre sí una distancia $\ell$

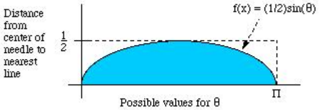
**Problema de la aguja de Buffon**

El problema es calcular la probabilidad de que al lanzar la aguja, ésta cruce alguna de las líneas del papel.

Java applet: *mste.illinois.edu/reese/buffon/buffon.html*

Tomar $\ell = 1$. Hay dos variables, el ángulo $\alpha$ con el que cae la aguja y la distancia del centro de la aguja la linea más cercana, $d$. Tenemos $0 \leq d < 1/2$ y $0 \leq \alpha \leq \pi$. La aguja cruzará una línea del papel cuando $d \leq (1/2)\text{sen}\,\alpha$ . Esto sucederá cuando $d$ esté en la región sombreada de la figura de la derecha.



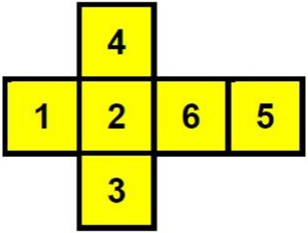




La probabilidad de que esto pase es:

$$\frac{\int_0^\pi \frac{1}{2}\text{sen}\,\alpha\, d\alpha}{\pi/2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \text{sen}\,\alpha\, d\alpha = \frac{2}{\pi}.$$

Si lanzamos la aguja $N$ veces y obtenemos $A$ cortes, se tiene $\frac{A}{N} \approx \frac{2}{\pi}$ y por tanto $\pi$ puede aproximarse por $2N/A$ cuando se hacen muchas pruebas.

En el Monopoly se lanzan dos dados. Cada ficha se mueve tantas casillas como la suma de los puntos que hay en las caras superiores de los dados. En la primera tirada, salir 7 es más probable que salir 12. ¿Cuánto más?

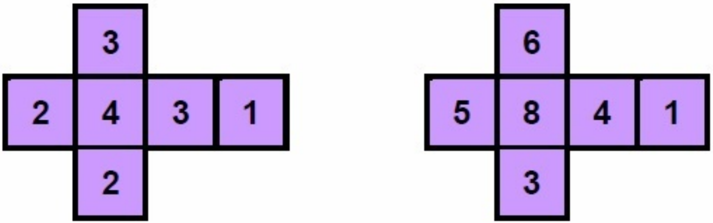



Solo hay que hacer la distribución de los posibles valores de la suma de los dos dados y contar:

| Puntos posibles | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilidad | 1/36 | 2/36 | 3/36 | 4/36 | 5/36 | 6/36 | 5/36 | 4/36 | 3/36 | 2/36 | 1/36 |

¿Hay algún otro par de dados con puntos en todas las caras que den las mismas probabilidades al lanzarlos juntos y sumar los puntos?

En 1970, el coronel George Sicherman encontró otro par de dados que al lanzarlos juntos y sumar los números de sus caras superiores daban la misma tabla de probabilidades que las del par de dados usuales. Aquí tienes los dados del coronel Sicherman:




**Comprueba que dan la misma tabla de probabilidad al lanzarlos juntos que las de los dados usuales.**

¿Cómo se pueden hallar los dados del coronel Sicherman? ¿Es el único par de dados, distintos de los ordinarios, que dan la misma tabla de probabilidades que la de los dados ordinarios al lanzarlos juntos?

Clare Hobbs, cuando era estudiante de Bachillerato, escribió la prueba en un artículo titulado *Let ’em roll*, publicado en la revista Plus Magazine (Diciembre 2006). Este es el enlace:

*https://plus.maths.org/content/let-em-roll*

Puedes descargar también la demostración desde la actividad 4.6.7 del enlace:

*verso.mat.uam.es/∼eugenio.hernandez/Estalmat-Materiales/Indice.htm*

# 6.4.5. El juego de las tres puertas.

En este juego televisivo: hay tres puertas, una sola de las cuales tiene premio.

El concursante elige una de las puertas.

Sabemos que el presentador, que sabe donde está el premio, siempre va a abrir, tras la elección del concursante, una puerta en la que no hay premio y que es distinta de la elegida por el concursante.

Luego le ofrece a éste la opción de cambiar de puerta.

¿Cambiarías tu elección inicial, o te quedarías con la puerta que elegiste al principio?, ¿es relevante esto?

Un análisis algo superficial nos dice que hay probabilidad 1/3 de acertar en la primera elección. Y que, después de que el presentador nos abra una, sólo quedan dos puertas, una de las cuales contiene el premio.

Así que. . . ¿probabilidad 1/2 de acertar?

En realidad, el análisis correcto es, como argumentó en su momento Marilyn Vos Savant en su columna de la revista Parade (para gran escándalo de muchos matemáticos profesionales), el siguiente:

El concursante tiene dos posibles estrategias:
- plantarse siempre en su primera elección
- aceptar siempre la opción de cambio de puerta

¿Cuál es mejor estrategia? ¿Y con qué probabilidad acertamos el premio en una y otra?

El juego se puede hacer en clase varias veces con grupos que cambien siempre de puerta y otros que no cambien.

El fichero vos-savant.xls, que se puede descargar del Moodle de la asignatura, contiene una simulación de este juego. Ha sido elaborado por Pablo Fernández Gallardo (Matemáticas, UAM)