6. PROBABILIDAD I

Eugenio Hernández

Universidad Autónoma de Madrid

COMPLEMENTOS PARA LA FORMACIÓN DISCIPLINAR
EN MATEMÁTICAS
Curso 2022-2023

6.1. Frecuencia y probabilidad. Modelos de probabilidad

Fenómeno aleatorio

Un fenómeno o experimento es aleatorio si puede dar lugar a varios posibles resultados sin que pueda predecirse exactamente que va a ocurrir en cada experimento.

John Kerrich, matemático inglés, estuvo prisionero durante la Segunda Guerra Mundial. En la soledad de su celda lanzó una moneda 10.000 veces y anotó las veces que salió cara:

Nº de lanzamientos	10	30	5000	10000
Caras	4	17	2523	5067
Proporción	$0,4$	$0,56$	$0,507$	$0,5067$

En un fenómeno aleatorio la tendencia a largo plazo de cada uno de los resultados es predecible

Lanzamiento de una moneda con EXCEL.

=ALEATORIO()
Produce un número aleatorio mayor o igual a 0 y menor que 1.

La tecla F9 produce un nuevo número aleatorio

=SI(ALEATORIO()$<$ 0,5;0;1)
Si el número aleatorio es menor que 0,5 pone un 0 (que puede ser CARA) y en caso contrario pone 1 (que puede ser CRUZ).

★ Repetir las veces que se desee.

=CONTAR.SI(Celda1:Celda2;"$=$ 0")
Cuenta el número de ceros en las celdas entre Celda1 y Celda2.

La probabilidad de un resultado en un experimento aleatorio es la proporción de veces que el resultado ocurre en un número infinito de pruebas:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{Nº de veces que aparece el resultado}}{\text{Nº de veces } n \text{ que se hace el experimento}}$$

Descripción matemática de la probabilidad.

Espacio muestral

El espacio muestral E de un experimento aleatorio es el conjunto de todos los resultados posibles que pueden obtenerse en el experimento.

Suceso

Un suceso es un subconjunto del espacio muestral E. Los sucesos con un solo elemento se llaman elementales o simples y el resto sucesos compuestos.

★ Poner ejemplos.

El siguiente paso es asignar probabilidades a los sucesos del espacio muestral. Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de todos los posibles sucesos de un experimento. La colección $\mathcal{A}$ debe tener estructura de álgebra de sucesos (no vacía, cerrada frente a uniones y complementarios). Si E es finito, $\mathcal{A}$ puede ser todos los subconjuntos de E.

Asignación de probabilidades

Dado un espacio muestral E y un álgebra de sucesos $\mathcal{A}$, una probabilidad es una aplicación $p : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$ tal que

1. $p(E) = 1$.
2. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ son sucesos incompatibles dos a dos (es decir, disjuntos dos a dos), $p(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} p(A_n)$.

NOTA: Si E es finito, la condición 2. puede sustituirse por: si $A \cap B = \emptyset, p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Regla de Laplace

Si el espacio muestral $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es finito y todos los sucesos elementales son equiprobables (es decir, $p(x_1) = p(x_2) = \dots p(x_n) = 1/n$), para cualquier suceso A se tiene:

$$p(A) = \frac{\text{Nº de elementos de } A}{n}.$$

Ejercicio 1. Se lanza un dado equiprobable. Escribe el espacio muestral y la asignación de probabilidades a cada uno de los suscesos elementales.

Ejercicio 2. Se lanzan dos dados equiprobables y se anota la suma. Escribe el espacio muestral y la asignación de probabilidades a cada uno de los suscesos elementales.

Ejercicio 3. A partir de los axiomas de probabilidad deduce lo siguiente: i) $p(A^c) = 1 - p(A)$, ii) $p(\emptyset) = 0$, iii) Si $B \subset A$, $p(A - B) = p(A) - p(B)$, iv) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

6.2. Probabilidad condicionada. Sucesos independientes.

PROBABILIDAD CONDICIONADA

Dados dos sucesos A y B, la probabilidad de B condicionada a A es la proporción de veces que ocurre B entre las que ha ocurrido A: $p(B/A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}$, $\quad p(A) > 0$.

Ejercicio 4. Al lanzar dos monedas equiprobables se sabe que ha salido al menos una cara. ¿Cuál es ahora la probabilidad de que hayan salido dos caras?

Ejercicio 5. Se ha realizado una encuesta a 120 personas sobre cuál de los periódicos A, B y C leen habitualmente. Los resultados son que 70 leen A, 45 leen B, 35 leen C, 5 ninguno de los tres, 15 leen A y B, 5 B y C, 20 A y C, y 5 leen los tres periódicos. Si se sabe que una persona lee al menos dos periódicos, ¿cuál es la probabilidad de que lea B? ¿Es cierto que siempre lee A?

De la definición de probabilidad condicionada se deduce $p(A \cap B) = p(A) \times p(B/A)$, que es la regla del producto para hallar la probabilidad de que A y B ocurran a la vez.

Sucesos independientes

Dados dos sucesos A y B, se dice que B es independiente de A, si $p(B/A) = p(B)$, es decir, la probabilidad de B no varía antes y después de que haya ocurrido A.

NOTA: De la regla del producto se deduce que si B es independiente de A, $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$. Además, si B es independiente de A se tiene:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B/A) \times p(A)}{p(B)} = \frac{p(B) \times p(A)}{p(B)} = p(A)\,,$$

por lo que A es también independiente de B y podemos hablar de sucesos independientes.

Ejercicio 6. Una caja contiene 8 bolas: 6 son rojas (R) y 2 son negras (N). Se realizan dos extracciones suponiendo que la bola extraida se devuelve a la caja antes de la segunda extracción. Calcula la probabilidad de extraer una bola de cada color.

A veces es difícil obtener la probabilidad del suceso $A \cap B$, pero es fácil calcular $p(B/A)$ o $p(A/B)$, por lo que se puede usar la regla del producto para calcular $A \cap B$.

Ejercicio 7. En una empresa trabajan 10 personas: 4 de ellas son fijas y 6 tienen contrato temporal. a) ¿cuál es la probabilidad de que al seleccionar al azar a tres de ellas, todas tengan un contrato temporal? b) ¿cuál es la probabilidad de que al seleccionar al azar a tres de ellas, al menos dos tengan un contrato temporal?

Ejercicio 8. Un sistema de ordenadores asigna códigos de conexión a los usuarios eligiendo cuatro letras al azar (de entre 26 del alfabeto) ¿Cuál es la probabilidad de que un código no tenga X?

Variaciones, permutaciones, combinaciones.

A. Variaciones sin repetición de n elementos tomados de r en r es el número de grupos ordenados de r elementos que pueden hacerse con los n elementos sin repetirlos:

$$V_n^r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}\,.$$

B. Variaciones con repetición de n elementos tomados de r en r es el número de grupos ordenados de r elementos que pueden hacerse con los n elementos pudiendo repetirse:

$$VR_n^r = n \times n \times n \dots n = n^r\,.$$

C. Permutaciones de r elementos son los grupos ordenados de r elementos sin repetición:

$$P_r = V_r^r = r(r-1)(r-2)\ldots 2 \times 1) = r!\,.$$

D. Combinaciones de n elementos tomados de r en r es el número de grupos de r elementos que pueden hacerse con los n elementos sin distinguir el orden (dos con distinto orden e iguales elementos son la misma combinación) y sin repetirse:

$$C_n^r = \frac{V_n^r}{P_r} = \frac{n!/(n-r)!}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}.$$

Ejercicio 9. Se reparte una mano de 7 cartas de una baraja de 40 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que la mano contenga el As de oros y el 3 de oros?

La regla del producto, $P(A \cap B) = p(A) \times P(B/A)$, es muy útil para calcular probabilidades. Ayuda hacer un diagrama en forma de árbol con la probabilidades de la intersección de dos sucesos de pruebas consecutivas.

Ejercicio 10. Se lanza una moneda. Si sale cara se acude a una urna que contiene 4 bolas blancas y 2 negras para extraer una bola. Si sale cruz se acude a una urna que contiene 3 bolas blancas y 3 negras para extraer una bola.
a) Escribe el espacio muestral y determina las probabilidades de cada suceso elemental.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraida sea blanca?
c) Si la bola extraida ha sido blanca, ¿ cuál es la probabilidad de que la bola extraida sea de la primera urna?

Ejercicio 11. ¿Cuál es la probabilidad de que en una clase de 50 alumnos, al menos dos tengan el mismo cumpleaños?

Ejercicio 12. Un diagnóstico para un cierto tipo de cáncer tiene probabilidad 0,96 de resultar positivo si el paciente tiene cáncer; el 95 % de los individuos sin cáncer dan negativo. Se elige un individuo al azar en una población en la que se sabe que el 1 % tiene cáncer.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo tenga cáncer y dé positivo? ¿Y de que tenga cáncer y dé negativo?

b) Si un individuo ha dado resultado negativo, ¿cuál es la probabilidad de que tenga cáncer?