5. Análisis matemático // 5.4. Problemas clásicos de optimización.

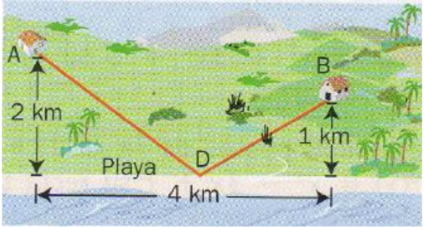
Eugenio Hernández

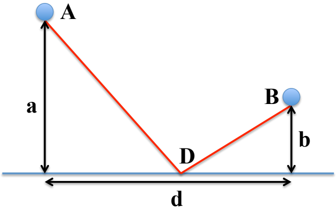
Universidad Autónoma de Madrid

COMPLEMENTOS PARA LA FORMACIÓN DISCIPLINAR EN MATEMÁTICAS
Curso 2022-2023

- Hasta ahora hemos resuelto los problemas de optimización usando derivadas.
- Vamos a ver que hay problemas de optimización para los que no se necesita derivar. Algunos se resolvieron mucho antes de la invención (o descubrimiento) del cálculo.
- Uno de los objetivos es luchar contra la idea de que la definición de máximo es “donde la derivada se anula y la derivada segunda es negativa”.

Dos pueblos situados cerca de la playa desean construir una carretera que los una pasando por la playa, de manera que les quede el camino mas corto posible. Es decir, deben minimizar la longitud de la carretera, que deberá pasar por la playa.

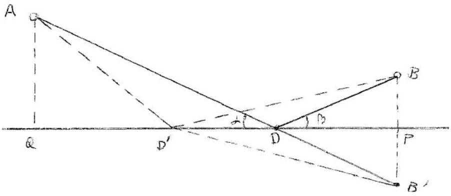




NOTA: En su formulación matemática, este es uno de los problemas más antiguos. Se atribuye a Herón por las referencias que de ello han quedado en varios libros, aunque no se conoce el texto en que Herón lo formuló.

Resuelve el problema de Herón

De manera geométrica, sin usar derivadas



Método de reflexión o de simetría.

El punto D de contacto de la carretera con la playa debe ser tal que los ángulos α y β de la figura sean iguales.

Ejercicio 1. Resuelve el problema de Herón

De manera analítica, es decir, usando derivadas

5.4.2. El problema de Fermat: gastanto menos energía.

Tres pueblos del desierto de Arizona, Hickory (H), Nickory (N) y Mickory (M), situados formando un triángulo acutángulo, han decidido construir una escuela de manera que el combustible que gasten los autobuses para acercar a los estudiantes diariamente hasta la escuela sea el menor posible. ¿Cuál debería ser el punto P en el que debería situarse la escuela?

Carta de P. de Fermat (1601-1665) a E. Torricelli (1608-1647)

Encontrar el punto tal que la suma de su distancia a los vértices de un triángulo es mínima

Hay muchas demostraciones de este resultado. El mismo Torricelli dio varias. También Cavalieri y Viviani. (Los tres eran estudiantes de Galileo)

El punto P que se obtiene como solución se llama Punto de Fermat (o Punto de Torricelli) del triángulo.

Ejercicio 2. Haz un razonamiento geométrico que demuestre que, si P estuviese fuera del triángulo $\triangle HMN$ que forman los tres pueblos, no sería rentable construir la escuela en P.

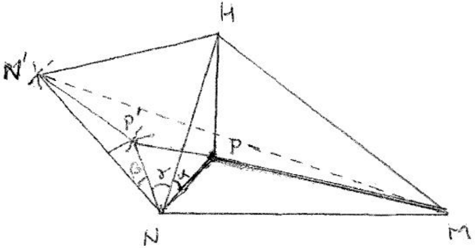
Ejercicio 3. Si $\triangle HMN$ tiene un ángulo ≥ 120 el punto de Fermat se sitúa en el vértice correspondiente a ese ángulo.

Vamos a dar una demostración geométrica de:

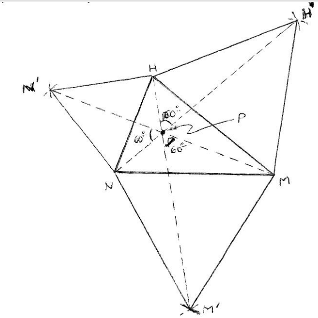
Supongamos que todos los ángulos de $\triangle HMN$ son < 120

La escuela debe situarse en P tal que los ángulos bajo los que se ven Nickory, Hickory y Mickery desde P sean, los tres, 120.

Sea P un punto del triángulo $\triangle HMN$.



1. Construimos triángulos equiláteros $\triangle PNP'$ y $\triangle NHN'$.
2. Los ángulos α y β son iguales. ¿Por qué?
3. $\triangle NPH$ y $\triangle NP'N'$ son congruentes. ¿Por qué?
4. $|PM| + |PN| + |PH| =$ la longitud de un camíno que une M y N'. ¿Por qué?
5. P y P' deben estar en el segmento $\overline{MN'}$. ¿Por qué?
6. El ángulo $\widehat{NPN'} = 60$. ¿Por qué?

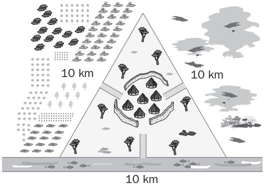


7. Trabajando sobre el vértice H (construyendo triángulos equiláteros $\triangle PHP'$ y $\triangle NHN'$), vemos que $\widehat{HPH'} = 60$.
8. Por tanto también $\widehat{HPN'} = 60$. ¿Por qué?
9. Concluimos que $\widehat{HPN} = 120$.
10. Podemos repetir la demostración sobre los otros lados.

Pregunta: ¿En qué punto hemos usado $\widehat{HNM} < 120$?

Un grupo de nuestros antepasados buscaba un lugar adecuado para establecer un poblado. Descubrieron un territorio llano en forma de triángulo equilátero de 10 km de lado.

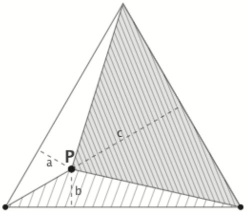
- A lo largo de uno de los lados del triángulo, discurría un río de donde podían tomar el agua e incluso pescar.
- Otro lado se abría a una sabana en donde podían cazar.
- El tercer lado limitaba completamente con un terreno fértil que podían cultivar.

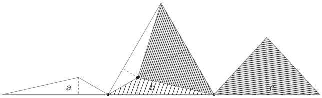


Instalarse allí supondría recorrer cada día, a una velocidad de $5km/h$ y regresando al poblado después de cada visita, el camino de ida y vuelta en línea recta hasta el río, la sabana y los cultivos.

Ejercicio 4 (el desafío) . ¿En qué punto deben establecer el poblado para minimizar la distancia recorrida? ¿Cuántas horas son necesarias cada día para recorrer estos trayectos de ida y vuelta?

Solución al desafío





Se trata de minimizar $a+b+c$. Llamando l al lado del triángulo y A a su área:

$$\frac{al}{2}+\frac{bl}{2}+\frac{cl}{2}=A=\frac{l}{2}(a+b+c).$$

Independientemente de dónde pongamos **P** se tiene entonces

$$a+b+c=\frac{2A}{l}=h$$

donde h es la altura del triángulo.

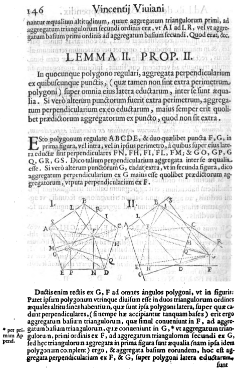
Por tanto para cualquier **P** la distancia a recorrer es la misma.

¿Cuántas horas son necesarias cada día para recorrer ida y vuelta estos trayectos?

Lo que hemos demostrado es el

TEOREMA DE VIVIANI (VINCENZO VIVIANI, 1622-1703)

La suma de las distancias desde un punto interior a cada uno de los lados de un triángulo equilátero es igual a la la altura del triángulo.



146 Vincentij Viuiani

nantur æqualium altitudinum, quare aggregatum triangulorum primi, ad aggregatum triangulorum ſecundi ordinis erit, vt AI ad LR, vel vt aggregatum baſium primi ordinis ad aggregatum baſium ſecundi. Quod erat, &c.

LEMMA II. PROP. II.

In quocunque polygono regulari, aggregata perpendicularium ex quibuſcunque punctis, (quæ tamen non ſint extra perimetrum polygoni) ſuper omnia eius latera eductarum, inter ſe ſunt æqualia. Si verò alterum punctorum fuerit extra perimetrum, aggregatum perpendicularium ex eo eductarum, maius ſemper erit quolibet prædictorum aggregatorum ex puncto, quod non ſit extra.

ESto polygonum regulare ABCDE, & duo quælibet puncta F, G, in prima figura, vel intra, vel in ipſius perimetro, à quibus ſuper eius latera eductæ ſint perpendiculares FN, FH, FI, FL, FM; & GO, GP, GQ, GR, GS. Dico talium perpendicularium aggregata inter ſe æqualia eſſe. Si verò alterum punctorum G, cadat extra, vt in ſecunda figura, dico aggregatum perpendicularium ex G maius eſſe quolibet prædictorum aggregatorum, vtputa perpendicularium ex F.

Ductis enim rectis ex G, F ad omnes angulos polygoni, vt in figuris: Patet ipſum polygonum vtrinque diuiſum eſſe in duos triangulorum ordines æquales altitudines habentium, quæ ſunt ipſa polygoni latera, ſuper quæ cadunt perpendiculares, (ſi nempe hæ accipiantur tanquam baſes) erit ergo aggregatum baſium triangulorum, quæ ſimul conueniunt in F, ad aggregatum baſium triangulorum, quæ conueniunt in G, * vt aggregatum triangulorum, primi ordinis ex F, ad aggregatum triangulornm ſecundi ex G, ſed hęc triangulorum aggregata in prima figura ſunt æqualia (nam ipſa idem polygonum complent) ergo, & aggregata baſium eorundem, hoc eſt aggregata perpendicularium ex F, & G, ſuper polygoni latera eductarum, ſunt

* per primam Append.

Aparece en el Apéndice del *De maximis et minimis geometrica divinatio in quintum conicorum Apollonio*, un tratado sobre cónicas (además de sobre optimización) que publicó Viviani en 1659.

¿Dónde están los triángulos?

La misma demostración da un resultado análogo para polígonos regulares.

5.4.4 EL PROBLEMA DE DIDO O PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO.

Dido era reina de Tiro (Fenicia) y estaba casada con Siqueo. Pigmalión, hermano de Dido, para poder usurpar el trono, mató a Siqueo y escondió su cadáver. Pero Siqueo se le apareció en sueños a Dido y le dijo que huyera de su patria y de su hermano. Dido, con un gran contingente de fenicios y con las riquezas de Siqueo, cuyo escondite le habia indicado éste, se hizo a la mar y desembarcó en las costas del norte de África. (La Eneida, Virgilio, 70-19 a.C.)

En Eneida I, 368, Virgilio escribe: "... y compraron un suelo, que llamaron Byrsa, tan grande como pudieron abarcar con una piel de toro."

Se atribuye a Dido la astucia de cortar la piel de toro en finas tiras, que unidas unas con otras formarían un perímetro que rodearía el suelo que compró. Byrsa estaba situada sobre la actual Cartago.

¿De qué forma distribuiría Dido las tiras para obtener el mayor espacio posible para ella y los fenicios que la acompañaban

De todas las curvas cerradas planas de una longitud dada, describir la que encierra mayor área.

Ejercicio 5. Demostrar que la curva que encierre mayor área debe encerrar una figura convexa.

Ejercicio 6. De un triángulo equilátero, un cuadrado, un hexágono regular y un círculo, todos ellos de perímetro fijo L, ¿cuál es el que encierra mayor área?

Ejercicio 7. EL PROBLEMA DE DIDO PARA TRIÁNGULOS

De todos los triángulos de perímetro fijado L, el de mayor área es el triángulo equilátero.

Ejercicio 8. El problema de Dido para cuadriláteros

El cuadrilátero de mayor área con un perímetro fijo L debe tener todos sus lados de igual longitud y debe ser un cuadrado.

El problema de Dido para un polígono de n lados

El mismo argumento que el del ejercicio 8, permite demostrar que de todos los polígonos de n lados con perímetro fijo L, el de mayor área debe tener todos sus lados iguales.

Resulta más difícil probar que de todos los polígonos de n lados de igual longitud y de longitud total fija, el de mayor área es el polígono regular (ver V.M. Tickhomirov, *Stories about maxima and minima*, Mathematical World, Vol. 1, AMS and MAA, (1990).

El problema de Dido una curva regular cerrada

Cociente isoperimétrico

Dada una curva cerrada de perímetro L que encierra área A se llama cociente isoperimétrico al numero $CI = 4\pi A/L^2$.

Ejercicio 9. Demuestra que el cociente isoperimétrico de una circunferencia es 1 y que el cociente isoperimétrico de un polígono regular de n lados es $\pi/(n\,\mathtt{tan}(\pi/n))$.

Ejercicio 10. Calcula el cociente isoperimétrico de polígonos regulares de n lados para n desde 3 hasta 10, y observa que todos son inferiores a 1. Prueba que si L es el perímetro de un polígono cualquiera y A su área, $4\pi A^2 < L^2$, es decir, su cociente isoperimétrico ha de ser menor que 1.

Curva cerrada regular

Una curva cerrada de perímetro L^* y área A^* se dice regular si para todo $\epsilon > 0$ existe un polígono de n lados (n depende de ϵ) de perímetro L_n y área A_n tal que $0 \leq L^* - L_n < \epsilon$ y $0 \leq A^* - A_n \leq \epsilon^2$.

Ejercicio 11. De todas las curvas regulares de perímetro fijo L, una que encierra mayor área es la circunferencia.