5. Análisis matemático // 5.3. Optimización.

Eugenio Hernández

COMPLEMENTOS PARA LA FORMACIÓN DISCIPLINAR
EN MATEMÁTICAS
Curso 2022-2023

¿QUÉ ENTENDEMOS POR OPTIMIZAR?

OPTIMIZAR (RAE):

Buscar la mejor manera de realizar una actividad.

Nosotros vamos a centrarnos en actividades que pueden modelizarse mediante una función

$$f : S \longrightarrow \mathbb{R},$$

(en ocasiones la imagen estará, por ejemplo, en $\mathbb{Z}$).

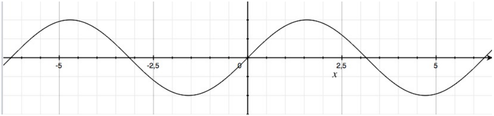
En este caso *optimizar* significa encontrar el mayor (o menor) valor que alcanza f sobre el *conjunto admisible* S:

$$max\{f(x) : x \in S\}.$$

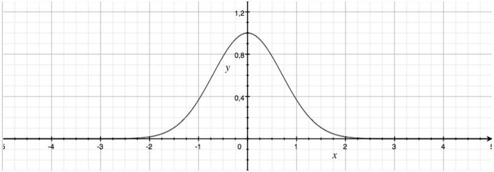
NOTA:

$$\begin{array}{ccc} maximizar & \leftrightarrow & minimizar \\ f & \leftrightarrow & -f \end{array}$$

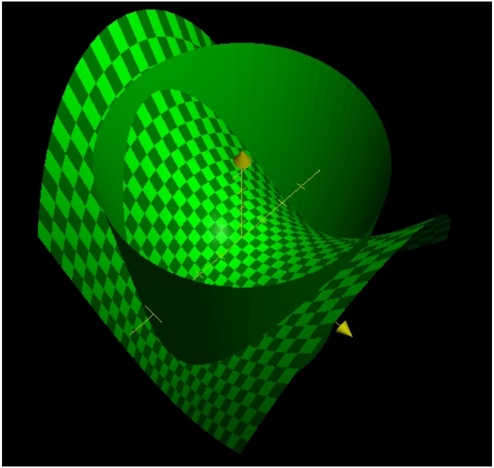
- A veces $S \subset \mathbb{R}$ y se trata de maximizar una función real de una variable:
  - *¿Cuál es mínimo valor de* $f(x) = \text{sen}(x)$ *en* $[-2\pi, 2\pi]$*?*



  - *¿Cuál es máximo valor de* $f(x) = e^{-x^2}$ *en* $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$*?*



- Otras veces $S \subset \mathbb{R}^n$ y la función a maximizar es de varias variables: *¿Cuál es mínimo valor de* $f(x,y) = x^2 - y^2$ *en el círculo de radio 1?*



- Pero a veces las funciones, o las variables, no son tan claras:
  - *Dido quiere construir Cartago pegada a la costa, que supondremos recta. De entre todas las curvas de longitud L "que empiezan y acaban en la costa", ¿cuál es la que encierra mayor área?*
  - *Dados n números reales $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}$, encuentra los n números enteros $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ que mejor los aproximan.*
    Este es el problema que hay que resolver al asignar escaños en el parlamento.
    ¿Alguna conjetura?
  - Una academia da los sábados clases de 7 asignaturas. Hay alumnos que van a más de una. ¿Cuántas horas necesita ocupar el local (como mínimo)?

5.3.1. Existencia de valores óptimos.

NO TODOS LOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN TIENEN SOLUCIÓN.

Maximizar la función $f(x) = \frac{1}{1-x}$ en el intervalo $[0, 1)$ no tiene solución porque $lim_{x \to 1^-} f(x) = \infty$.

TEOREMA DE WEIERSTRASS

Si $S = [a, b]$ es un intervalo cerrado y acotado (compacto) y

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

es continua, existen $x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Es decir, $f(x_1)$ es el valor mínimo de f y $f(x_2)$ es el valor máximo de f en $[a, b]$.

Ejercicio 1. a) ¿Por qué necesitamos que f sea continua?
b) ¿Por qué necesitamos que el intervalo S sea cerrado?
c) ¿Por qué necesitamos que sea acotado?

Si S no es acotado todavía podemos decir algo:
Ejercicio 2. Demuestra el siguiente

COROLARIO DEL TEOREMA DE WEIERSTRASS

Sea
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
continua y tal que $lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ y $lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$.

Existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (es decir, $f(x_0)$ es el valor mínimo de f en $\mathbb{R}$).

Ejercicio 3. a) ¿Puedes escribir un corolario análogo en el que la conclusión sea que existe seguro $max\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$?
b) ¿Y un corolario análogo para $f : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$?
c) ¿Y para $f : (-\infty, b] \longrightarrow \mathbb{R}$?

Para funciones de variables variables se tiene

TEOREMA DE WEIERSTRASS (VARIAS VARIABLES)

Si $S \subset \mathbb{R}^n$ es compacto (cerrado y acotado) y

$$f : S \longrightarrow \mathbb{R}$$

es continua, existen $x_1, x_2 \in S$ tales que

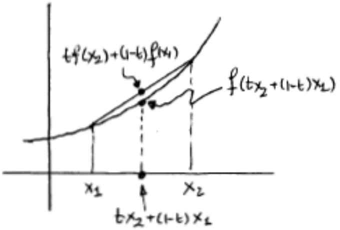
$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \text{para todo } x \in S.$$

Es decir, $f(x_1)$ es el valor mínimo de f y $f(x_2)$ es el valor máximo de f en S.

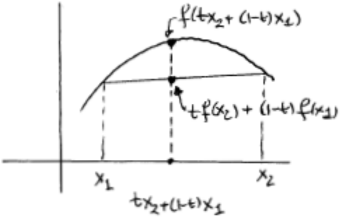
Ejercicio 4. ¿Puedes escribir para $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y $S \subset \mathbb{R}^n$ cerrado, pero no necesariamente acotado, un resultado similar al del corolario anterior?

En algunos casos el máximo o mínimo se alcanza en un punto crítico:

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ cóncava hacia arriba (hacia abajo) y $f \in C^1(A)$. Si existe $c \in A$ tal que $f'(c) = 0$, f alcanza en c su mínimo (máximo) global en A.



Cóncava hacia arriba



Cóncava hacia abajo

5.3.2. Un método para optimizar.

1. Formulación del problema: Hallar la fórmula que rige el fenómeno planteado. Se debe conseguir una función $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ con $S \subset \mathbb{R}^n$ y describir de manera precisa el conjunto S.

2. Discusión: Mostrar que la función tiene un valor óptimo usando el teorema de Weierstrass o cualquiera de sus variantes.

3. Hallar los puntos críticos: En el conjunto en el que la función f tenga derivada o existan sus derivadas parciales, hallar los puntos críticos resolviendo el sistema (o una ecuación si $n = 1$)

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = 0\,, \quad j = 1, 2, \ldots, n\,.$$

4. Solución: Hallar la solución entre los valores de f en:

- los puntos críticos (en los que f sea derivable),
- los puntos en los que f no sea derivable,
- los puntos de la frontera de S (puede requerir opitimizar f sobre su frontera).

De todos estos el que produzca el mayor valor es el máximo (si existe) y el que produzca el menor valor es el mínimo (si existe).

NOTA: No es necesario calcular la segunda derivada, ni el hessiano de la función en el caso de varias variables, ya que estamos interesados en extremos globales y no locales.

Ejemplo: *¿Cuáles son el máximo y mínimo valor de*

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

en el círculo de radio 1?

Ejercicio 5. De todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio R, hallar el de mayor área.

Ejercicio 6. Queremos construir una lata cilíndrica para comercializar un producto. La soldadura de la hojalata se ha puesto muy cara. Queremos que la lata tenga un volumen de 1 litro con el mínimo gasto de soldadura posible ¿Que dimensiones debe tener la lata?

Ejercicio 7. Hallar las coordenadas del punto $P = (x, y)$ cuya suma de los cuadrados de las distancias a tres puntos fijos $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ y $C = (c_1, c_2)$ sea mínima.