Máster de Formación de profesorado de Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

Curso 2022-2023

COMPLEMENTOS DE MATEMÁTICAS PARA LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

HOJA 2 DE EJERCICIOS

(Para entregar el 10 de febrero de 2023.)

Aritmética

1. En alemán la prueba del nueve se llama *Neuner- und Elferprobe* (Prueba del nueve y del once) porque, además de comprobar módulo 9, comprueban también módulo 11.

a) Utiliza la prueba del 9 y del 11 para comprobar que las siguientes divisiones están mal hechas:

$$\begin{array}{r|l} 673\,544\,456\,789 & 3\,110 \\ \cline{2-2} 981 & 216\,573\,880 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 673\,544\,456\,789 & 3\,104 \\ \cline{2-2} 639 & 217\,992\,415 \end{array}$$

b) Da un ejemplo de una división incorrecta, con como mucho un dígito mal en el cociente y un dígito mal en el resto, que, sin embargo, pase la prueba del 9 y del 11.

2. Halla la única solución de $133x \equiv 1000 \mod 2010$. (Sugerencia: usar el algoritmo de Euclides)

3. Un usuario del criptosistema RSA ha publicado la clave $(n, e) = (629, 419)$ y recibe el mensaje cifrado **251**. ¿Cuál era el mensaje original? [NOTA: para simplificar, los mensajes son números. De hecho la respuesta es **208** y se trata de que justifiques cómo se llega a él.]

4. Sea p un número primo.

a) Demuestra que si $0 < k < p$ se cumple la igualdad $k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}$

b) Demuestra que p divide a $\binom{p}{k}$ para $0 < k < p$.

c) Demuestra por inducción que $b^p \equiv b \mod p$ para cualquier entero $b \geq 0$.

Álgebra lineal

5. Resolver los siguientes SEL usando el método de Gauss:

$$a)\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \qquad d)\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 3 \end{cases}$$

6. Hallar la matrices inversas de las siguientes matrices utilizando el método de Gauss:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1/a \\ a & -1 \end{pmatrix} \ a \neq 0; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \ a \neq 0.$$

7. Calcular el determinante de la matriz de orden 3 dada por $A_3 = \begin{pmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{pmatrix}$. Con la misma regla que se genera la matriz A_3 considera la matriz A_n de orden n. ¿Cuál es su determinante?

8. Hallar todos los valores de m para los que el siguiente sistema posee soluciones no triviales:

$$\left\{ \begin{array}{r} 2x - y + z = 0 \\ x + my - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{array} \right\}.$$

9. Determinar la posición relativa de los siguientes pares de rectas y hallar el punto de intersección si se cortan:

a) $(x, y) = (2, 1) + t(1, 1)$ y $(x, y) = (1, 0) + s(-5, -5)$.

b) $2x - y = 4$ y $(x, y) = (2, 0) + t(-2, 4)$.

10. Dados los siguientes rectas en el espacio, determinar su posición relativa y si se cortan, hallar el punto de intersección:

$$\left\{ \begin{array}{r} 2x + 3y - z = 3 \\ x - 3y = 4 \end{array} \right\} \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{r} x + y = 2 \\ y - z = -1 \end{array} \right\}.$$