

HOJA 1 DE EJERCICIOS

(Para entregar el 27 de enero de 2023.)

Es obvio, pero os recuerdo que, aunque no os salga un problema o un apartado, podéis usarlo para otros. Lo único que hay que evitar son los argumentos circulares.

Medias y porcentajes

1. El ganador de una prueba ciclista ha hecho las siguientes medias en cada una de las 3 etapas:

- 1ª etapa (175 km): 35 km/h.
- 2ª etapa (144 km): 32 km/h.
- 3ª etapa (60 km contrarreloj): 40 km/h.

¿Cuál ha sido su velocidad media en el total del recorrido?

2. En verano colaboro en un programa de radio. Por motivos legales debo gestionar el cobro de los honorarios a través de la Fundación de la UAM, que percibe un 15 % de la cantidad abonada por la emisora en concepto de canon, recibiendo yo el resto. De lo que recibo debo pagar el 20 % de impuestos. ¿De qué porcentaje del dinero que ha pagado la radio podré disponer finalmente tras pagar el canon y los impuestos? Si pienso que debo recibir por mi trabajo 500 euros netos, ¿cuánto tendré que pedir a la radio que abone a la Fundación?

Aritmética

3. Demuestra por inducción:

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b) $2^n > n^2 + 1$ para todo $n > 4$.

4. a) Calcula el máximo común divisor de 2301253 y 2404001.

b) Calcula el mínimo común múltiplo de 2331713 y 2313341.

5. Sean $a < b, c < d$ cuatro números reales. Demuestra que el cardinal del intervalo $I = (a, b)$ es igual al cardinal del intervalo $J = (c, d)$ definiendo una correspondencia biyectiva entre I y J .

6. Demuestra que $\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}$ y $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ son irracionales.

7. Usa el algoritmo de Euclides para hallar una solución de la ecuación $ax + by = (a, b)$ con $x, y \in \mathbb{Z}$ en los casos siguiente:

i) $a = 63, b = 49$

ii) $a = 619, b = 93$.

8. a) Encuentra el dígito de control c de este código EAN: 5 – 449000 – 00099c.

b) En este código EAN se ha borrado un número, ¿cuál era?: 5 – 449000 – 03?895

9. La letra del NIF es un “dígito” de control que sirve para evitar errores. Cada letra se asigna dependiendo del resto que resulta de dividir el número del DNI entre 23 de acuerdo con la siguiente tabla:

Resto:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Letra:	<i>T</i>	<i>R</i>	<i>W</i>	<i>A</i>	<i>G</i>	<i>M</i>	<i>Y</i>	<i>F</i>	<i>P</i>	<i>D</i>	<i>X</i>	<i>B</i>	<i>N</i>	<i>J</i>	<i>Z</i>	<i>S</i>	<i>Q</i>	<i>V</i>	<i>H</i>	<i>L</i>	<i>C</i>	<i>K</i>	<i>E</i>

- a) Comprueba lo anterior en tu NIF y calcula la letra que corresponde al DNI 02516341.
- b) Observa que si escribimos las 8 cifras del DNI como $a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0$, y llamamos L a la letra, el NIF satisface la ecuación $\sum_{i=0}^7 a_i \cdot 10^i - L \equiv 0 \pmod{23}$. Demuestra que si se introduce un error en un dígito del NIF (número o letra) nos daremos siempre cuenta.

10.

- a) Encuentra, y demuestra por qué funciona, una forma de decidir si un número natural N es múltiplo de 11 y, más en general, de encontrar el resto al dividir N entre 11, que no requiera hacer ninguna división. (Es decir, encuentra y demuestra una “regla de divisibilidad entre 11” sencilla).
- b) Dibuja el grafo de divisibilidad del 11. (Indicación: sigue un método similar al explicado en clase para el 7).