Geometría Afín V: Aplicaciones afines.

1. Calcula las ecuaciones de la aplicación afín $T\colon \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ que cumple $T(1,1) = (2,3)$, $T(3,2) = (3,8)$ y $T(2,3) = (1,7)$, si existe.

2. Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín y $h : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una homotecia de centro $C \in \mathbb{A}$ y razón λ. Demuestra que si $\lambda \neq 1$ entonces C es el único punto fijo de h. ¿Qué ocurre si $\lambda = 1$?

3. Sea $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ una aplicación afín. Demostrar:

a) f es inyectiva si y sólo si $\overrightarrow{f}$ es inyectiva.

b) f es sobreyectiva si y sólo si $\overrightarrow{f}$ es sobreyectiva.

c) Si f es biyectiva entonces f^{-1} es aplicación afín y $\overrightarrow{f^{-1}} = (\overrightarrow{f})^{-1}$.

4. Sea $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ una aplicación afín. Se dice que una variedad lineal $L \subset \mathbb{A}$ es invariante por f si para todo $Q \in L$ se tiene que $f(Q) \in L$.

a) Demuestra que si L es invariante por f entonces $\overrightarrow{L}$ es un subespacio invariante por $\overrightarrow{f}$;

b) Ilustra mediante, un ejemplo, que el recíproco del apartado anterior no tiene por qué ser cierto.

5. Sea $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una aplicación afín y sea $L(f) \subset \mathbb{A}$ el conjunto de puntos fijos por f. Demostrar que si $L(f) \neq \emptyset$ entonces $L(f)$ es un subespacio afín y $\overrightarrow{L(f)} = L(\overrightarrow{f})$, donde $L(\overrightarrow{f}) \subset \overrightarrow{\mathbb{A}}$ denota el subespacio vectorial de los vectores fijos por $\overrightarrow{f}$.

6. Sea $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una aplicación afín tal que $\overrightarrow{f}$ tiene 1 como autovalor. Demuestra, mediante un ejemplo, que esa condición no es suficiente para que f tenga puntos fijos.

7. Calcula las ecuaciones, si existe, de la homotecia $f\colon \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ en los siguientes casos:

a) $f(1,1) = (-3,0)$ y $f(-1,0) = (-1,1)$. **b)** $f(1,1) = (4,2)$ y $f(-1,0) = (-2,-1)$

8. Consideramos las rectas en $\mathbb{R}^2$: $r_1 : x + 2y - 4 = 0$ y $r_2 : x = 2y$. Calcular la expresión analítica con respecto al sistema referencia canónico de $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ de:

a) la simetría sobre r_1 en la dirección de r_2.

b) la proyección sobre r_1 en la dirección de r_2.

9. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por $f(x,y) = \frac{1}{5}(3x - 4y + 8, -4x - 3y + 16)$.

a) Calcular la matriz de f con respecto al sistema referencia canónico de $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$.

b) Demostrar que f es una simetría y calcular los elementos geométricos que la determinan.

10. Sea $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ una aplicación afín. Demostrar

a) Si $L \subset \mathbb{A}$ es una variedad lineal, entonces $f(L) \subset \mathbb{A}'$ es una variedad lineal tal que $\overrightarrow{f(L)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{L})$. En particular $\dim f(L) = \text{rango}(\overrightarrow{f})$.

b) Si $M \subset \mathbb{A}'$ es una variedad lineal tal que $f^{-1}(M) \neq \emptyset$, entonces $f^{-1}(M) \subset \mathbb{A}$ es una variedad lineal tal que $\overrightarrow{f^{-1}(M)} = (\overrightarrow{f})^{-1}(\overrightarrow{M})$.

c) f transforma variedades lineales paralelas en variedades lineales paralelas. En particular f transforma puntos alineados en puntos alineados.

11. Cambio de coordenadas cartesianas a baricéntricas. Sea $x \in \mathbb{R}^2$ con $x = (x_1, x_2)_{\mathcal{R}_c}$ en el sistema de referencia cartesiano $\mathcal{R}_c = \{0; \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$. Sean (μ_0, μ_1, μ_2) las coordenadas de x en el sistema de referencia baricéntrico $\mathcal{R}_b = \{a_0, a_1, a_2\}$ donde

$$a_0 = (1,1)_{\mathcal{R}_c}\,, \qquad a_1 = (0,-1)_{\mathcal{R}_c}\,, \qquad a_2 = (-2,0)_{\mathcal{R}_c}\,.$$

Halla una matriz M de tamaño 3×3 que satisfaga

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

(Sugerencia: Reescribir la fórmula para calcular las coordenadas baricéntricas de un punto tomando $p = 0$.)

12. Ecuaciones de una aplicación afín en coordenadas baricéntricas. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación afín dada por

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

en el sistema de referencia cartesiano $\mathcal{R}_c = \{0; \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$. Sea $\mathcal{R}_b$ el sistema de referencia baricéntrico del ejercicio anterior. Halla las ecuaciones de f en el sistema de referencia baricéntrico $\mathcal{R}_b$. (Sugerencia: Usar la definición de f y la matriz M del ejercicio anterior.)