

**Geometría Afín II:**

**Posición relativa de variedades lineales. Intersección y suma. Sistemas de referencia baricéntricos.**

1. Considera el siguiente par de rectas del espacio afín  $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ :

$$r = (1, 0, 1) + \langle (1, \alpha, 0) \rangle, \quad y \quad s = (1, 1, 2) + \langle (1, 1, \beta) \rangle.$$

- a) Estudia la posición relativa  $r$  y  $s$  dependiendo de los valores de  $\alpha$  y  $\beta$ .
- b) Describe la variedad lineal  $r + s$  dependiendo de los valores de  $\alpha$  y  $\beta$ .

2. En  $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ , considera los conjuntos

$$L = \{(x, y, z) : x + 2y - z = 1\} \quad y \quad M = \{(x, y, z) : x - y + 2z = 2 \text{ y } x - z = 1\}.$$

- a) Demuestra que  $L$  y  $M$  son variedades lineales.
- b) Determina si  $L$  y  $M$  se cortan, son paralelas, o se cruzan. Si se cortan, halla su intersección.

3. En  $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ , considera los conjuntos

$$L_1 = \{(x, y, z, w) : x = 1, y = 2\} \quad y \quad L_2 = \{(x, y, z, w) : z = -2, w = 3\}.$$

- a) Demuestra que  $L_1$  y  $L_2$  son variedades lineales.
- b) Determina si  $L_1$  y  $L_2$  se cortan, son paralelas, o se cruzan. Si se cortan, halla su intersección.

4. En el espacio afín  $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$  estudia la posición relativa de las variedades lineales

$$L_1 = (1, 0, 0) + \langle (0, 2, 1) \rangle, \quad y \quad L_2 = \{(x, y, z) : x + 2y + z = 1\}.$$

Describe las variedades lineales intersección y suma.

5. Consideremos las rectas  $L_1 = \{x + y + z = x + 2y = 0\}$ ,  $L_2 = \{2x + 2y + z = 3, x + y = 2\}$  y  $L_3 = \{3x + 2y + 2z = 2, 2x + y + z = 0\}$  del espacio afín  $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ . Demuestra que se cruzan dos a dos.

6. Decide, de manera razonada, si los siguientes resultados son verdaderos o falsos:

- a) Dos rectas paralelas en  $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$  o bien son coincidentes, o bien no se cortan.
- b) Dos rectas en  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  que no se cortan deben ser paralelas.
- c) En  $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$  con  $n \geq 3$  dos rectas que no se cortan no tienen por qué ser paralelas.

7. Sea  $\mathbb{A}$  un espacio afín de dimensión  $n$  y  $L_1, L_2 \subset \mathbb{A}$  subespacios afines. Demuestra que si la dimensión de  $L_1$  es  $n - 1$  y la dimensión de  $L_2 \geq 1$ , entonces  $L_1$  y  $L_2$  no se pueden cruzar.

8. En el espacio afín  $(\mathcal{A}, V, \varphi)$  de dimensión  $n$ , sean  $L_1 = a_1 + V_1$  y  $L_2 = a_2 + V_2$  dos subespacios afines. Demuestra que si  $V = V_1 \oplus V_2$ , entonces  $L_1$  y  $L_2$  se cortan en un punto.

9. Sean  $A = (1, 1, 1)$ ,  $B = (1, 2, 3)$ ,  $C = (2, 3, 1)$  y  $D = (3, 1, 2)$  cuatro puntos de  $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$  dados por sus coordenadas cartesianas respecto a un sistema de referencia  $\mathcal{R}$ .

- Demuestra que  $\mathcal{R}' = \{A, B, C, D\}$  es un sistema de referencia baricéntrico.
- Calcula las coordenadas cartesianas respecto a  $\mathcal{R}$  del baricentro de  $A, B, C, D$ .
- Si  $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ , halla las coordenadas baricéntricas de  $O$  respecto a  $\mathcal{R}'$ .

10. Demuestra que en  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  los puntos medios de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo.

11. Sean  $O$  un punto y sean  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  dos vectores linealmente independientes. A todo escalar  $\lambda$ , se le asocian los puntos  $A$  y  $B$  tales que

$$\vec{OA} = \lambda \vec{u}, \quad \vec{OB} = \lambda \vec{v}.$$

Determina el baricentro de  $A$  y  $B$  en función de  $\lambda$ .

12. Halla las ecuaciones baricéntricas del plano que contiene a la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = z$$

y al punto  $P = (-1, -2, 5)$  en  $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ .

13. En  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ , considera los puntos  $P_0, P_1, P_2, Q_0, Q_1$  y  $Q_2$ , cuyas coordenadas cartesianas en el sistema de referencia cartesiano  $\mathcal{R}_C = \{P_0; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  son las siguientes:

$$\begin{aligned} P_0 &= (0, 0), & P_1 &= (1, 7), & P_2 &= (1, 1) \\ Q_0 &= (-1, 1), & Q_1 &= (1, 4), & Q_2 &= (3, 0) \end{aligned}$$

a) Demuestra que los puntos de  $\mathcal{R}' = \{P_0, P_1, P_2\}$  son afinmente independientes. Demuestra que los puntos de  $\mathcal{R}'' = \{Q_0, Q_1, Q_2\}$  son afinmente independientes.

b) Halla las coordenadas baricéntricas de  $P_0, P_1$  y  $P_2$  respecto a  $\mathcal{R}''$  y las de  $Q_0, Q_1$  y  $Q_2$  respecto a  $\mathcal{R}'$ .

Considera los sistemas de referencia cartesianos  $\mathcal{R}'_C = \{P_0; \vec{P_0P_1}, \vec{P_0P_2}\}$  y  $\mathcal{R}''_C = \{Q_0; \vec{Q_0Q_1}, \vec{Q_0Q_2}\}$ .

c) Calcula las coordenadas cartesianas de  $Q_0, Q_1$  y  $Q_2$  respecto a  $\mathcal{R}'_C$  y las de  $P_0, P_1$  y  $P_2$  respecto a  $\mathcal{R}''_C$ .

d) Describe las ecuaciones generales de cambio de coordenadas cartesianas entre  $\mathcal{R}'_C$  y  $\mathcal{R}''_C$ .

e) Describe las ecuaciones generales de cambio de coordenadas baricéntricas entre  $\mathcal{R}'$  y  $\mathcal{R}''$ .