

Geometría Afín I:

Espacio afín. Subespacios afines. Sistema de referencia cartesiana. Ecuaciones

1. Sea $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ un espacio afín, y sea (L, W, φ) un subespacio afín (o variedad lineal), es decir, $L = p_0 + W$, donde p_0 es un punto en \mathcal{A} .
 - a) Demuestra que si $p, q \in L$, entonces $\varphi(p, q) \in W$ (con lo cual la aplicación $\varphi : L \times L \rightarrow W$ está bien definida).
 - b) Demuestra que (L, W, φ) es un espacio afín en sí mismo, es decir, satisface los dos axiomas de la definición de espacio afín.
2. Demuestra que un subconjunto H del espacio afín $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ es una variedad lineal si y sólo si *para todo par de puntos de H la recta que los une está contenida en H* .
3. Sea $T = \cup_{n \in \mathbb{N}} \{x + y = n\}$. Decide, de manera razonada, si el conjunto T es una subvariedad lineal de $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$.
4. Sea $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ un sistema de referencia cartesiano en el espacio afín $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ respecto del cual el punto p tiene coordenadas $(0, -1)$. Construye otro sistema de referencia en $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ respecto del cual el punto p tenga como coordenadas $(-1, 0)$.
5. Sean P, Q y R tres puntos de $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ tales que \overrightarrow{PQ} y \overrightarrow{PR} son linealmente independientes.
 - a) Prueba que los vectores \overrightarrow{RP} y \overrightarrow{RQ} son linealmente independientes. Considera las referencias cartesianas $\mathcal{R} = \{P; \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\}$ y $\mathcal{R}' = \{R; \overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ}\}$.
 - b) Escribe las coordenadas cartesianas de P, Q y R respecto a \mathcal{R} .
 - c) Escribe las coordenadas cartesianas de P, Q y R respecto a \mathcal{R}' .
 - d) Halla las ecuaciones de cambio de coordenadas entre las dos referencias.
 - e) Decide, de manera razonada, si existe algún punto en $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ con las mismas coordenadas respecto a los dos sistemas de referencia.
6. Determina unas ecuaciones implícitas de los subespacios afines $L_t = p_t + V$ de $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$, donde $p_t = (1, -2, 3, t)$ y $V = \mathfrak{L}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ con $\vec{u}_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{u}_2 = (0, 0, 1, 1)$ y $\vec{u}_3 = (1, 2, -1, 0)$ en un sistema de referencia fijado. ¿Para qué valor de t la variedad L_t pasa por el origen?
7. Halla unas ecuaciones implícitas de la variedad lineal L de $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ generada por los puntos $p_1 = (1, 0, 0, 1)$, $p_2 = (0, 1, 0, 1)$ y $p_3 = (0, 0, 1, 1)$, cuyas coordenadas están dadas con respecto a un sistema de referencia fijado. ¿Cuál es la dimensión de L ?
8. Halla unas ecuaciones implícitas del subespacio afín de $\mathbb{A}^5(\mathbb{R})$ generado por los puntos $P_1 = (-1, 2, -1, 0, 4)$, $P_2 = (0, -1, 3, 5, 1)$, $P_3 = (4, -2, 0, 0, -3)$ y $P_4 = (3, -1, 2, 5, 2)$.

9. En $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ y con respecto de una referencia dada \mathcal{R} , se dan los puntos $A = (1, 1)$, $B = (-2, 0)$, los vectores $\vec{u}_1 = (1, 2)$ y $\vec{u}_2 = (-1, 1)$ y el subespacio afín L de ecuaciones $x_1 - x_2 = 1$.

a) Halla las coordenadas de B respecto al sistema de referencia $\mathcal{R}' = \{A; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

b) Halla una ecuación implícita de L con respecto a \mathcal{R}' .

10. Sea \mathcal{R}' un sistema de referencia en el plano $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ que se obtiene girando un ángulo α en sentido positivo los vectores de un sistema de referencia canónico \mathcal{R} . Si C es la circunferencia cuyos puntos $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ satisfacen $(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 4$ en el sistema de referencia \mathcal{R} , halla las ecuaciones de C en el sistema de referencia \mathcal{R}' . ¿Cuáles son las coordenadas del centro de la circunferencia respecto de \mathcal{R}' ?

11. En $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ se consideran las referencias cartesianas:

$$\mathcal{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} \text{ y } \mathcal{R}' = \{O'; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}.$$

Sean $O'_{\mathcal{R}} = (-1, 6, 2)$, $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 + \vec{u}_3$, $\vec{v}_2 = -\vec{u}_1$ y $\vec{v}_3 = 2\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2 + 7\vec{u}_3$. Si un plano π tiene ecuación $2x - y + 3z = 0$ en \mathcal{R} , halla su ecuación respecto a \mathcal{R}' .