ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA • Grado en Matemáticas Curso 2022–23

Hoja 3

Espacios euclídeos y hermíticos III.
Proyecciones. Poryecciones ortogonales. Aplicaciones adjuntas.

1. Calcula la proyección sobre la recta V_1 dada por las ecuaciones $\{x+y+z=0, x-y=0\}$ en la dirección del plano vectorial V_2 generado por los vectores $w_1 = (1,0,1)$ y $w_2 = (1,1,0)$. Escribe la proyeccion sobre el plano V_2 en la dirección de la recta V_1.

2. En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual, determina las ecuaciones de la proyección ortogonal sobre el subespacio vectorial generado por los vectores $(1,1,-1,0)$ y $(0,0,2,1)$.

3. Encuentra la expresión en coordendas de la proyección ortogonal (con respecto al producto hermítico usual) sobre la recta $l = \{x-(1+i)z = 0,\ y = 0\}$.

4. En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar con matriz en la base canónica

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcula la proyección ortogonal del vector con coordenadas $(1,1,1)$ sobre el plano $\{y+z=0\}$.

5. Sea $V = M_2(\mathbb{C})$ y el producto hermítico $\langle A, B\rangle = \text{traza}(A\overline{B}^T)$. Encuentra la expresión en coordenadas de la proyección ortogonal sobre el plano generado por $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Calcula la aplicación adjunta de:

a) $h(x,y,z) = (x+y+z, x+2y+2z, x+2y+3z)$, con el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$.

b) $h(x_1,x_2) = (x_1+x_2, x_1+2x_2)$ con el producto escalar de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$\phi((x_1,x_2),(y_1,y_2))) = x_1y_1 + (x_1+x_2)(y_1+y_2)$$

7. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_n[x]$ definimos el producto escalar

$$\phi(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx.$$

Demuestra que la aplicación $A : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x]$ dada por $A(p(x)) = xp(x)' - (xp(x))'$ es autoadjunta (donde $p(x)'$ denota la derivada de $p(x)$).

8. Considerando el producto escalar usual en $\mathbb{R}^3$ estudia si la aplicación A es autoadjunta cuando su matriz asociada en la base $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(1,0,1),(1,2,0)\}$ es

$$\begin{pmatrix} -4 & -5 & -6 \\ 4 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

9. Diagonalizar en una base ortonormal cada una de las siguientes aplicaciones demostrando en primer lugar que son autoadjuntas:

a) $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $A(x, y) = (2x + y, 2y + x)$.

b) $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $A(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$.

10. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz asociada en la base estándar de $\mathbb{R}^3$ es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Encuentra una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ respecto a la que la matriz de f sea diagonal.

11. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sean $f, g : V \to V$ dos aplicaciones autoadjuntas. Decide de manera razonada si la composición $f \circ g$ es autoadjunta.

12. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n. Se dice que una aplicación lineal $P : V \to V$ es una proyección si $P^2 = P$. El subespacio Ker P es la *dirección de la proyección* y el subespacio Im P es el *subespacio sobre el que se proyecta*.

a) Demuestra que una proyección siempre es diagonalizable.

b) Demuestra que $V = \text{Ker } P \oplus \text{Im } P$.