

Espacios euclídeos y hermíticos I.

Formas bilineales y hermíticas. Productos escalares. Normas inducidas por productos escalares.

1. Decide de manera razonada si las siguientes funciones  $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  son formas bilineales simétricas, o sesquilineales hermíticas, según corresponda, en los espacios vectoriales  $V$  sobre  $\mathbb{K}$  con  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ .

- a)  $V = \mathbb{M}_2(\mathbb{K})$ , con  $\varphi(A, B) = \text{traza}(A + \overline{B})$ ;
- b)  $V = \mathbb{M}_2(\mathbb{K})$ , con  $\varphi(A, B) = \text{traza}(A\overline{B})$ ;
- c)  $V = \mathbb{M}_2(\mathbb{K})$ , con  $\varphi(A, B) = \text{traza}(A\overline{B}) - \text{traza}(A)\text{traza}(\overline{B})$ ;
- d)  $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es diferenciable}\}$ , con  $\varphi(f, g) = \int_0^1 f'(t)g(t)dt$ ;
- e)  $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$ , con  $\varphi(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)(x^2 + 1)dx$ ;
- f)  $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$ , con  $\varphi(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x - 1)dx$ ;
- g)  $V = \mathbb{K}^2$ , con  $\varphi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (x_1 + y_1)^2 - x_2y_2$ .

2. Considera la base estándar  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Escribe la matriz  $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  de las siguientes formas bilineales:

- a)  $\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_3 + 2x_2y_2 - 5x_2y_3 + 4x_3y_1$ ;
- b)  $\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$ .

3. Considera ahora la base  $\mathcal{B}' = \{(1, 2, 3), (-1, 1, 2), (1, 2, 1)\}$  de  $\mathbb{R}^3$  y denotamos por  $(x'_1, y'_1, z'_1), (x'_2, y'_2, z'_2)$  las coordenadas de dos vectores de  $\mathbb{R}^3$  respecto a la base  $\mathcal{B}'$ . Escribe la expresión en términos de las coordenadas anteriores de las formas bilineales del ejercicio 2.

4. Se dice que una forma bilineal (resp. sesquilineal)  $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  es antisimétrica (resp. antihermítica) si para todo par de vectores  $u, v \in V$  se tiene que  $\varphi(u, v) = -\varphi(v, u)$  (resp.  $\varphi(u, v) = -\overline{\varphi(v, u)}$ ).

- a) Encuentra una forma bilineal antisimétrica  $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ;
- b) Sea  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $V$  y sea  $\varphi$  una forma bilineal (resp. sesquilineal) en  $V$ . Da una condición necesaria y suficiente sobre  $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  para que  $\varphi$  sea antisimétrica (resp. antihermítica);
- c) Demuestra que toda forma bilineal (respectivamente, sesquilineal)  $\varphi$  en  $V$  se puede escribir como la suma de una forma bilineal simétrica (resp. hermítica) y una antisimétrica (resp. antihermítica).

5. Para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$  considera en  $\mathbb{R}^3$  la aplicación bilineal

$$\phi_{\alpha}((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Calcula los valores de  $\alpha$  para los que  $\phi_{\alpha}$  es un producto escalar.

6. Considera la aplicación  $\phi : \mathbb{M}_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\phi(A, B) = \text{traza}(AB^T)$ .

- a) Demuestra que  $\phi$  es un producto escalar en  $\mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ .
- b) ¿Cuál sería el producto escalar análogo en  $\mathbb{M}_3(\mathbb{C})$ ?

7. Para cada  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  considera en  $\mathbb{R}^3$  la aplicación bilineal

$$\phi_{\alpha, \beta}((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} \beta & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Describe el subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  determinado por los pares  $(\alpha, \beta)$  para los que  $\phi_{\alpha, \beta}$  es un producto escalar.

8. Sea  $V = \mathbb{C}^3$  y sea  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$  la base estándar. Sea  $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  la forma sesquilineal cuya matriz asociada respecto a  $\mathcal{B}$  es:

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 2 & 1+i \\ 0 & 1-i & 3 \end{pmatrix}$$

Demuestra que  $\varphi$  es un producto hermítico.

9. Sea  $(V, \langle, \rangle)$  un espacio vectorial hermítico.

a) Demuestra la **Identidad del paralelogramo**: Para todo par de vectores  $u, v \in V$ ,

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

b) Demuestra la **Identidad de polarización**: Para todo par de vectores  $u, v \in V$ ,

$$4\langle u, v \rangle = \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2.$$

c) Demuestra que para todo par de vectores  $u, v \in V$ ,

$$2\langle u, v \rangle = \|u+v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - (1+i)\|u\|^2 - (1+i)\|v\|^2.$$

d) ¿Cuáles serían las identidades de los apartados anteriores si  $V$  fuera un espacio vectorial euclídeo?

10. Sea  $\|(x, y)\| = |x| + |y|$  definida en  $\mathbb{R}^2$ . Demuestra que  $\|\cdot\|$  es una norma en  $\mathbb{R}^2$ , pero que no proviene de ningún producto escalar porque no satisface la identidad del paralelogramo.

11. Sea  $V$  un espacio vectorial euclídeo o hermítico. Demuestra que si  $x, y \in V$  se tiene

$$\|x-y\| \geq \left| \|x\| - \|y\| \right|.$$