Primer Examen Intermedio

Viernes, 3 de marzo de 2023

APELLIDOS: ______________________ NOMBRE: ______________

DNI: ______________________ GRUPO: ______________

Problema 1. (2,5 puntos) Sea $V = \mathbb{C}^3$ y $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ su base canónica.

(a) Prueba que la forma sesquilineal $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$ cuya matriz en la base $\mathcal{B}$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 1 & 6 & -i \\ -i & i & 2 \end{pmatrix}$$

es un producto hermítico.

(b) Sea $W = \{(z_1, z_2, z_3) \in V : z_1 = z_2 = iz_3\}$. Halla una base del complemento ortogonal de W con respecto al producto hermítico dado por φ.

Problema 2. (2,5 puntos) Sean $u_1 = (0, 1, 0, 1), u_2 = (-1, 0, -2, 2)$ dos vectores en $\mathbb{R}^4$ cuyas coordenadas están dadas con respecto a la base canónica.

(a) Usa el procedimiento de Gram-Schmidt para hallar una base ortogonal del subespacio W generado por los vectores u_1, u_2, con respecto al producto escalar usual.

(b) Halla la proyección ortogonal sobre W del vector $x = (1, 2, 1, 1)$.

Problema 3. (2,5 puntos) Considera el producto escalar en $\mathbb{R}^2$ dado por

$$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

(a) Halla una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar dado por φ.

(b) Halla la expresión en coordenadas de la aplicación adjunta de

$$A(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$$

con respecto al producto escalar dado por φ.

Problema 4. (2,5 puntos)

(a) Halla las ecuaciones de la simetría S_W en $\mathbb{R}^3$ con respecto al plano W dado por la ecuación $x + z = 0$.

(b) Halla las ecuaciones del giro en $\mathbb{R}^3$ de amplitud $\pi/2$ con respecto a la recta generada por el vector $u = (1, 0, 1)$ orientada según este vector.

TIEMPO: 2 HORAS.