HOJA DE EJERCICIOS 9
Análisis Matemático (Grupo 130)
CURSO 2021–2022.

Problema 1. Para cada uno de los siguientes campos de velocidades en el plano, halla los caminos integrales y las transformaciones de flujo. Dibuja el retrato de fase.

$$\begin{array}{ccccc} (1,y) & , & (1,x) & , & (x,x^2)\ , \\ (x,y) & , & (x,-y) & , & (y,-x)\ . \end{array}$$

Problema 2. Determina el valor de la constante c para que el campo sea un gradiente. Con ese valor de c, halla un potencial escalar para el campo.

$$\begin{array}{rcl} \big(\, cxz\,,\, w\,,\, x^2\,,\, y\,\big) & \text{en} & \mathbb{R}^4_{xyzw}\ , \\[2mm] \big(\, 2xye^z + xz\,,\, e^z x^2\,,\, x^2 y e^z + cx^2\,\big) & \text{en} & \mathbb{R}^3_{xyz}\ , \\[2mm] \big(\, e^{yz} + z\,,\, xze^{yz} + y^2\,,\, xye^{yz} + cx\,\big) & \text{en} & \mathbb{R}^3_{xyz}\ . \end{array}$$

Problema 3. Determina el valor de la constante c para que el siguiente campo en $\mathbb{R}^3$ sea un rotacional. Con ese valor de c, halla un potencial vector.

$$\big(\, y\,\mathrm{sen}(yz)\,,\, x^2y + z\,,\, 3y^2 + cx^2z\,\big)\ .$$

Problema 4. Halla un potencial vector para cada uno de los campos siguientes.

$$\big(\, 2\,,\, x - e^x\,,\, 3x^2y - 2y\,\big) \quad , \quad \big(\, yz\,,\, xz\,,\, xy\,\big)\ .$$

Problema 5. Demuestra las siguientes identidades:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{rot}\,\nabla f & \equiv & \mathbf{0}\ , \\ \mathrm{div}\,\mathbf{rot}\,G & \equiv & 0\ , \\ \mathrm{div}\,(f\,F) & = & \nabla f\cdot F + f\,\mathrm{div}\,F\ , \\ \mathbf{rot}\,(f\,F) & = & \nabla f\times F + f\,\mathbf{rot}\,F\ , \\ \mathrm{div}\,(F\times G) & = & (\mathbf{rot}\,F)\cdot G - F\cdot\mathbf{rot}\,G\ , \\ \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,F & = & \nabla\,\mathrm{div}\,F - \Delta F\ . \end{array}$$

Problema 6. Sea $n \geq 2$. Consideramos el **radio esférico** $\rho \overset{\text{def}}{=} \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Halla una constante α tal que el siguiente campo en $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$

$$\rho^\alpha\,\nabla\rho\ ,$$

tenga divergencia idénticamente nula.

Problema 7. En $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ consideramos el "campo gravitatorio" $F \equiv \rho^{-2}\,\nabla\rho$.

a) Haz un dibujo de los abiertos siguientes

$$U_1 \;=\; \mathbb{R}^3 \setminus \big(\,\{(0,0)\}\times[0,+\infty)\,\big) \quad , \quad U_2 \;=\; \mathbb{R}^3 \setminus \big(\,\{(0,0)\}\times(-\infty,0]\,\big)\ .$$

b) Para $j = 1,2$, comprueba que el campo G_j está definido en U_j y es un potencial vector para $F|_{U_j}$:

$$G_1 \;=\; \frac{(\,y\,,\,-x\,,\,0\,)}{\rho\,(\rho - z)} \quad , \quad G_2 \;=\; \frac{(\,-y\,,\,x\,,\,0\,)}{\rho\,(\rho + z)}\ .$$

¿Coinciden G_1 y G_2 en $U_1 \cap U_2$?
