HOJA DE EJERCICIOS 8
Análisis Matemático (Grupo 130)
CURSO 2021–2022.

Problema 1. Considérense las subvariedades unidimensionales $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^3$ dadas por

$$C_1 \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad C_2 \begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

a) Representar gráficamente ambas curvas.

b) Probar que, efectivamente, son subvariedades de dimensión 1.

c) Hallar la recta tangente a C_1 en el punto $\big(1\,,\,2\,,\,-3\big)/\sqrt{14}$.

d) Hallar la ecuación del plano normal a C_2 en el punto $\big(2\,,\,3/2\,,\,-5/2\big)$.

Problema 2. Representar gráficamente el conjunto

$$C = \big\{\, \big(\, \cos t\,,\ \ \operatorname{sen} t\,,\ t^2\,(2\pi - t)^2\,\big) \,:\, 0 \le t \le 2\pi \,\big\} \ \subset\ \mathbb{R}^3\,,$$

y probar que es una subvariedad de dimensión 1 en $\mathbb{R}^3$. Hallar los espacios tangente y normal a C en el punto $(1,0,0)$.

Problema 3. *a)* Hallar el hiperplano tangente a la gráfica $G \subset \mathbb{R}^4$ de la función

$$f(x,y,z) \ \equiv\ e^y\,\cos z + e^z\,\cos x + e^x\,\cos y$$

en el punto de G correspondiente a $x=y=z=0$.

b) Estudiar si

$$M \ =\ \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, f(x,y,z)=3\,\}$$

define, cerca del punto $p=(0,0,0)$, una superficie regular en $\mathbb{R}^3$. Hallar el plano tangente a M en p. Explicar la relación que guarda éste con el calculado en el apartado anterior.

Problema 4. Sea $X\subset\mathbb{R}^N$ una subvariedad de dimensión n. Dado cualquier abierto $W\subseteq\mathbb{R}^N$, demuestra que $X\cap W$ es o vacío o una subvariedad de dimensión n.
Si $W'\subseteq\mathbb{R}^N$ es otro abierto y $\sigma: W\to W'$ es un difeomorfismo, demuestra que $\sigma(X\cap W)$ también es o vacío o una subvariedad de dimensión n.

Problema 5. Sean $X,Y\subset\mathbb{R}^N$ dos hipersuperficies, es decir dos subvariedades de dimensión $N-1$, con intersección $X\cap Y$ no vacía.
Demuestra que si en todo $p\in X\cap Y$ se tiene $T_pX\neq T_pY$ entonces $X\cap Y$ es una subvariedad de dimensión $N-2$.

Problema 6. *(a)* Halla el máximo y el mínimo de $f(x,y,z)\equiv x-2\,y+2\,z$ en la esfera $\{x^2+y^2+z^2=1\}$.

(b) Determina los extremos absolutos de la función $f(x,y,z)\equiv 2\,x^2+y^2+z^2-xy$ sobre el conjunto

$$K \ =\ \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{8}\ \le\ 1\right\}.$$

Problema 7. Sea $X=C_1\cap C_2\subset\mathbb{R}^3$ la subvariedad del ejercicio 2 de la hoja 7. Halla los valores máximo y mínimo de $x+z$ en X, así como los puntos donde se alcanzan.

Indicaciones: (1) Demuestra que en tales puntos $y\notin\{0,1\}$. (2) Demuestra que en tales puntos x/y y $z/(1-y)$ son iguales a una misma cantidad u. (3) Reescribe las ecuaciones de C_1 y C_2 en términos de (u,y).

Problema 8. Demuestra la desigualdad aritmético-geométrica:

$$\text{para } \; a_1, a_2, \ldots, a_n \;\geq\; 0 \;, \quad \text{se tiene } \; \sqrt[n]{a_1\, a_2 \cdots\, a_n} \;\leq\; \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Indicación: Escribe $a_i = x_i^2$ y considera sólo lo que ocurre en la esfera unidad n-dimensional.

Problema 9. Hallar el valor máximo de $\log x + \log y + 3\,\log z$ en la porción de la esfera $\{x^2 + y^2 + z^2 = 5\,r^2\}$ en la que $x > 0$, $y > 0$ y $z > 0$. Aplicar el resultado para demostrar que para cualesquiera números reales positivos a, b, c se cumple

$$a\,b\,c^3 \;\leq\; 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5 .$$

Problema 10. Calcula los extremos absolutos de la función $f(x, y) \equiv 2\,x + y^2$ sobre el conjunto

$$K \;=\; \big\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 \leq 2\;,\; y^2 \geq x \,\big\}\,.$$

Problema 11. Sea la función

$$f_\alpha(x, y) \;\equiv\; x^4 + y^4 + \alpha(x^2 + y^2) \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

a) Calcular los valores de α para los que f_α sólo tiene un máximo relativo, indicando el valor del mismo.
b) Determinar el valor del parámetro α_0 de forma que $(5, 5)$ sea un punto crítico para f_α.
c) Para el valor calculado en el apartado anterior, determinar el máximo y mínimo absolutos de f_α en

$$\{x^2 + y^2 = 36\}\,.$$
